

Considerações de Projeto Sobre a Análise de Vibrações de Sistemas Estruturais de Pisos de Concreto Armado

*Anderson Bastos Amorim de Amorim¹
Fernanda da Rocha de Carvalho Lopes¹
José Guilherme Santos da Silva²
Maria Elizabeth da Nóbrega Tavares³*

Resumo

O ímpeto econômico vigente nos atuais projetos de engenharia civil exige dos projetistas a maior economia com o máximo aproveitamento de espaço físico possível, ou seja, a criação de ambientes amplos com um gasto mínimo de material e tempo de execução. Neste cenário surgem projetos estruturais cada vez mais arrojados, onde grandes vãos e estruturas esbeltas são freqüentes. Tal fato tem gerado estruturas com valores de freqüências naturais muito baixos e mesmo próximas das freqüências de excitações correntes, associadas, por exemplo, a atividades humanas rítmicas, o que pode induzir a estrutura a entrar em ressonância. Assim sendo, o presente trabalho tem por objetivo a análise de vibrações de sistemas estruturais de pisos de concreto armado. Esta investigação contribui com a modelagem computacional de diversos pisos de concreto armado, onde considera-se uma variação de grandezas importantes para o projeto desse tipo de estrutura, tais como: espessura das lajes e geometria das vigas de suporte. Uma análise paramétrica extensa é desenvolvida com o intuito de obterem-se as freqüências naturais e os modos de vibração, via Método dos Elementos Finitos (MEF), com base no emprego do programa ANSYS, comparando esses valores com aqueles calculados através de diversas normas de projeto. Desta forma, pretende-se alertar os projetistas de estruturas para distorções que podem ocorrer em determinados casos da prática corrente de projeto, observando se a faixa de freqüência em que se encontram os modelos estruturais é aceitável sob o ponto de vista de vibrações excessivas.

Palavras-chave: Pisos de Concreto, Análise de Vibrações, Modelagem Computacional.

1 Introdução

Tradicionalmente, os sistemas estruturais correntes na engenharia civil são analisados supondo-se que as cargas atuantes são aplicadas muito lentamente. Tal hipótese está associada a uma análise puramente estática, sendo apropriada para o tratamento, por exemplo, de ações permanentes como o peso próprio da estrutura.

No entanto, nos casos em que as ações são variáveis ao longo do tempo (incidência de vento sobre edifícios, tráfego de veículos sobre o tabuleiro de pontes, movimentos de pessoas sobre pisos, atividades humanas rítmicas, tais como dança e ginástica aeróbica), os efeitos dinâmicos podem vir a ser decisivos para a resposta final de um determinado sistema estrutural.

Por outro lado, a evolução dos processos de cálculo estrutural aliado ao desenvolvimento de materiais mais resistentes tem propiciado a execução de estruturas cada vez mais esbeltas e flexíveis. Essas estruturas têm se mostrado mais susceptíveis às ações dinâmicas.

A tendência de projetarem-se pisos de edificações e passarelas de pedestres com vãos cada vez maiores tem induzido o projetista a considerar na metodologia de análise, efetivamente, os problemas inerentes a vibrações excessivas causadas por excitações rítmicas associadas aos seres humanos (movimentação de pessoas e atividades rítmicas).

Quando essas vibrações são perceptíveis aos sentidos humanos, podem vir a provocar efeitos que vão, por exemplo, desde o desconforto, a preocupação com relação à segurança da estrutura, e até mesmo o

1 Mestrado em Engenharia Civil, PGECIV/ FEN/UERJ; andersonbamorim@yahoo.com.br; fernandacl@gmail.com.

2 Departamento de Engenharia Mecânica, Faculdade de Engenharia, FEN/UERJ; jgss@uerj.br.

3 Departamento de Estruturas e Fundações, Faculdade de Engenharia, FEN/UERJ; etavares@uerj.br.

declínio do nível de concentração mental, dentre outros. Tais efeitos variam com a frequência e amplitude das vibrações, bem como com as atividades realizadas.

Uma consequência direta desta tendência atual de projeto (índices de esbeltez elevados) diz respeito a um aumento considerável dos problemas estruturais, em particular aqueles provocados por excitações dinâmicas, (BACHMANN & AMMANN, 1987), (MURRAY *et al.*, 1997), (FAISCA, 2003), (MOREIRA, 2004), (VARELA, 2004), (MELLO, 2005) e (MELLO *et al.*, 2005).

No que tange aos critérios de resistência e estabilidade dos sistemas estruturais compostos por pisos de concreto armado, percebe-se que estes têm atendido aos estados limites últimos e os de serviço, Vale ressaltar que os estados de limite de serviço verificados são, basicamente, aqueles referentes à deformação excessiva e fissuração dos elementos estruturais, ainda assim este último quase que apenas quando o empreendimento encontra-se situado em ambiente agressivo.

De outra forma, os problemas relacionados aos estados limites de utilização, principalmente aqueles associados à vibração excessiva, devem ser analisados de forma mais criteriosa, objetivando-se uma busca por alternativas viáveis para as metodologias de análise e projeto, de forma a evitar a ocorrência de desconforto humano no sistema estrutural provenientes, por exemplo, de atividades humanas.

Assim sendo, esta investigação apresenta um estudo sobre o comportamento dinâmico de pisos de concreto armado correntemente utilizados em projetos de engenharia civil. Para tal são considerados inúmeros parâmetros de projeto, tais como: espessura das lajes e concreto, altura das vigas e vão dos sistemas estruturais.

São consideradas duas estratégias de análise, a saber: inicialmente são obtidas as frequências naturais dos diversos pisos, mediante o emprego de expressões analíticas propostas por normas e recomendação técnicas de projeto (NBR-8800, 1986), (CAN3-S16, 1989), (MURRAY *et al.*, 1997), (NBR-6118, 2003).

Modelos computacionais mais refinados são desenvolvidos, via Método dos Elementos Finitos (MEF), empregando-se técnicas usuais de discretização, por meio do emprego do programa ANSYS (ANSYS, 1998). Nestes modelos numéricos, as vigas e os pilares de concreto armado são simulados por elementos finitos de viga tridimensionais, onde são considerados os efeitos de flexão e de torção. A laje de concreto armado é simulada por meio de elementos finitos de casca.

Os resultados obtidos numericamente são comparados com aqueles obtidos mediante o emprego de

expressões analíticas encontradas em diversas normas e recomendações de projeto (MURRAY *et al.*, 1997), (CAN3-S16, 1989), (NBR-8800, 1986), (NBR-6118, 2003). Os valores das frequências naturais dos modelos, obtidas ao longo da análise, são comparados com valores limites propostos em códigos vigentes, objetivando verificar se a faixa de frequência em que se encontram os modelos estruturais investigados é aceitável sob o ponto de vista de vibrações excessivas.

2 Metodologia de Análise

De forma a respaldar as análises numéricas desenvolvidas nesta investigação, são desenvolvidos quatro modelos estruturais parametrizados (Modelos Estruturais I a IV), Figuras 1 a 4, e com características geométricas semelhantes, oriundos de um pano de laje básico e posterior combinação do mesmo em dois, três e quatro panos de laje conjugados, formando assim quatro modelos estruturais distintos, como apresentado nas Figuras 1 a 4.

Estes modelos estruturais consistem de pisos de concreto armado, constituídos por um sistema correntemente utilizado na prática de projeto formado por lajes, vigas e pilares. A influência da rigidez real dos pilares é levada em conta em todos os modelos e a ligação entre estes e as vigas é considerada rígida, dada à característica monolítica das mesmas.

Todos os modelos estruturais possuem a dimensão denominada de “Lj”, Figuras 1 a 4, variando na faixa de 5,0 m a 10,0 m em intervalos de 0,5 m em 0,5 m. O espaçamento entre as vigas transversais (V1) foi considerado igual a 3,0 m, Figuras 1 a 4.

As características geométricas da seção transversal das vigas V1, Figuras 1 a 4, são mantidas constantes ao longo da análise sendo consideradas as seguintes: seção transversal retangular de (0,2 x 0,5) m, gerando uma área de seção transversal de 0,10 m² e momento de inércia de 2,083x10⁻³ m⁴.

As vigas principais, Vigas V2, Figuras 1 a 4, apresentam as mesmas características geométricas em todos os modelos estruturais analisados, ou seja: seção transversal retangular de (0,2 x 0,6) m, área da seção transversal igual a 0,12 m² e momento de inércia de 3,60x10⁻³ m⁴.

Os pilares são considerados com uma altura igual a 5,0 m (pé-direito de 5 m) e possuem as mesmas características geométricas em todos os modelos investigados, a saber: seção quadrada de (0,35 x 0,35) m, com área da seção transversal de 0,123 m² e momento de inércia igual a 1,25x10⁻³ m⁴.

O concreto armado considerado ao longo de todo o trabalho apresenta as seguintes características

físicas: resistência característica a compressão igual a 25 MPa ($f_{ck}=25\text{MPa}$), módulo de elasticidade de 24 GPa ($E=24\text{GPa}$), peso próprio igual a 25 kN/m³ e coeficiente de Poisson de 0,2 ($\nu=0,2$).

O estudo paramétrico desenvolvido contempla dois casos distintos, associado à prática corrente de projeto: Caso I e Caso II. As análises numéricas pertinentes ao Caso I foram realizadas variando-se a espessura das lajes de concreto ($e=0,10\text{m}$, $e=0,12\text{m}$ e $e=0,15\text{m}$), em conjunto com a variação do vão “Lj” dos pisos, Figuras 1 a 4. Em seguida, no Caso II, varia-se a rigidez das vigas V1 (geometria das vigas), em conjunto com a espessura adotada nas lajes de cada modelo. Vale ressaltar que o vão “Lj” dos pisos, Figuras 1 a 4, também é modificado.

O Caso II considera, portanto, as seguintes situações distintas, referentes às características geométricas para os modelos estruturais em estudo: laje de concreto com 0,15 m de espessura e viga V1 com seção transversal retangular de (0,2 x 0,475) m, correspondente a uma área de seção transversal de 0,095 m² e um momento de inércia de $1,786 \times 10^{-3} \text{ m}^4$; laje de concreto com 0,12 m de espessura e viga V1 com seção transversal retangular de (0,2 x 0,45) m, gerando uma área de seção transversal de 0,090 m² e um momento de inércia de $1,519 \times 10^{-3} \text{ m}^4$; laje de concreto com 0,10 m de espessura e viga V1 com seção transversal retangular de (0,2 x 0,425) m, referente a uma área de seção transversal de 0,085 m² e um momento de inércia de $1,279 \times 10^{-3} \text{ m}^4$.

3 Normas e Recomendações Técnicas

A frequência fundamental de um sistema estrutural, f_1 , é um dos parâmetros mais importantes para uma avaliação dos níveis de vibração de um dado sistema estrutural. Deste modo, o presente trabalho tem por objetivo o desenvolvimento de uma análise paramétrica extensa, a partir da obtenção dos valores dessas frequências naturais, analiticamente e numericamente, no que diz respeito aos diversos modelos estruturais propostos (Modelos estruturais I a IV), ilustrados nas Figuras 1 a 4.

Inicialmente as frequências fundamentais são calculadas analiticamente, mediante o emprego de recomendações técnicas e normas de projeto correntes (NBR-8800, 1986), (CAN3-S16, 1989) e MURRAY *et al.* (1997), para cada um dos sistemas estruturais investigados, mostrados nas Figuras 1 a 4.

Para tal são adotadas para os elementos estruturais desses modelos as características geométricas definidas na metodologia de análise (item 2 deste trabalho). Em seguida, essas frequências são compa-

radas com os valores numéricos obtidos, via emprego do programa computacional de elementos finitos ANSYS (ANSYS, 1998).

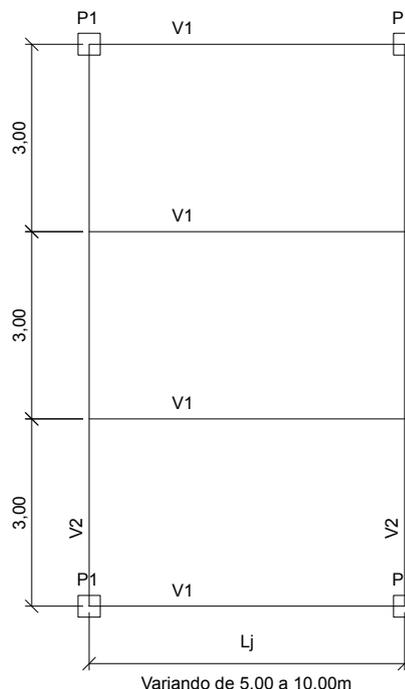


Figura 1 – Modelo Estrutural I.

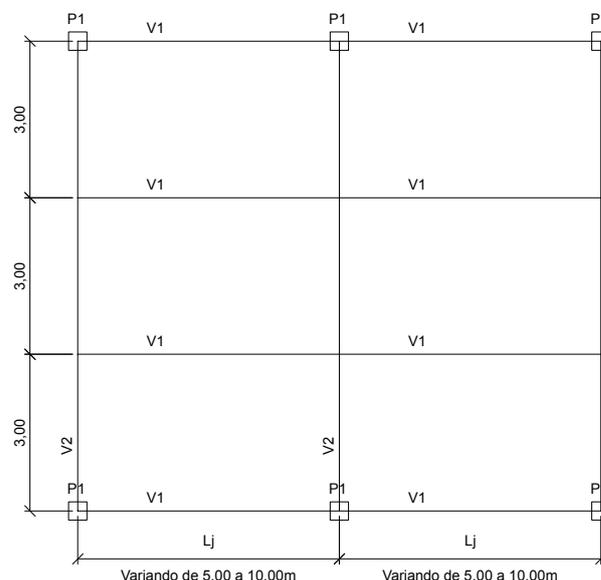


Figura 2 – Modelo Estrutural II.

3.1 Norma Brasileira – Projeto e Execução de Estruturas de Aço em Edifícios (Método dos Estados Limites): NBR 8800/1986

De acordo com as recomendações técnicas da NBR-8800 (NBR-8800, 1986), o valor da frequência fundamental f_1 (em Hz), pode ser estimado analiti-

camente considerando-se ação mista de interação total, mesmo para construções não mistas. Para o caso de um sistema estrutural simplesmente apoiado, com vigas em uma só direção, esta frequência pode ser calculada mediante o emprego da Equação (1).

$$f_1 = 1,57 \sqrt{\frac{EI}{mL^4}} \quad (1)$$

onde

- f_1 : frequência fundamental do sistema em Hz;
- E: módulo de elasticidade do material em N/m²;
- I: momento de inércia da seção transformada em m⁴;
- m: massa da seção mista por unidade de comprimento, ao longo do vão em kg/m;
- L: vão da viga em m.

No que tange a transformação da seção do elemento estrutural de concreto em aço, deve-se observar que no caso do presente estudo a seção considerada diz respeito apenas ao momento de inércia da seção de concreto, considerando-se a largura efetiva do concreto como sendo igual ao espaçamento entre vigas dos modelos estruturais.

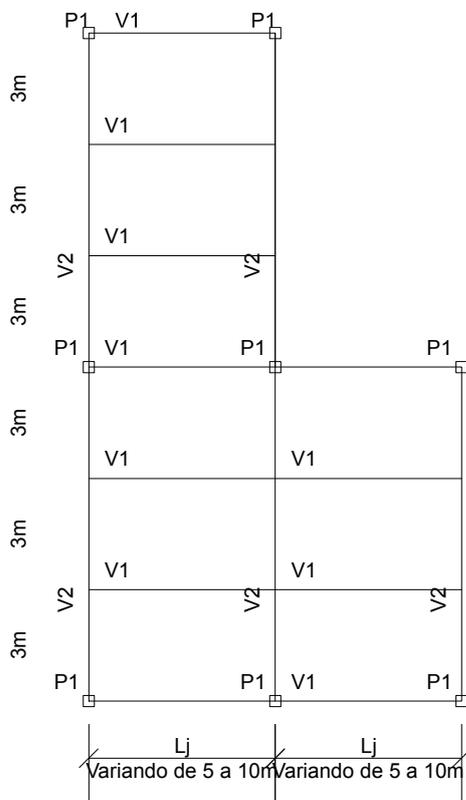


Figura 3 - Modelo Estrutural III.

Frequentemente, sistemas estruturais com vigas em apenas uma direção geralmente são apoiados em vigas transversais, o que pode reduzir a frequência fundamental calculada anteriormente. Deste modo, o valor da frequência fundamental do sistema pode ser obtido, aproximadamente, por meio da Equação (2).

$$\frac{1}{f_1^2} = \frac{1}{f_x^2} + \frac{1}{f_y^2} \quad (2)$$

onde f_x e f_y : Frequências naturais do sistema estrutural, em Hz, calculadas com base no emprego da Equação (1), considerando-se para tal a laje simplesmente apoiada nas direções x e y, respectivamente.

Deve-se destacar, também, que para o caso de vigas contínuas (ou lajes contínuas), estas devem ser tratadas como simplesmente apoiadas, já que os vãos adjacentes vibram em direções opostas.

3.2 Norma Canadense – Steel Structures for Buildings. Limits States Design: CAN3-S16

Inicialmente, deve-se ressaltar que a Norma Brasileira NBR-8800 (NBR-8800, 1986), descrita no item 3.1 deste trabalho, tem como base o texto refe-

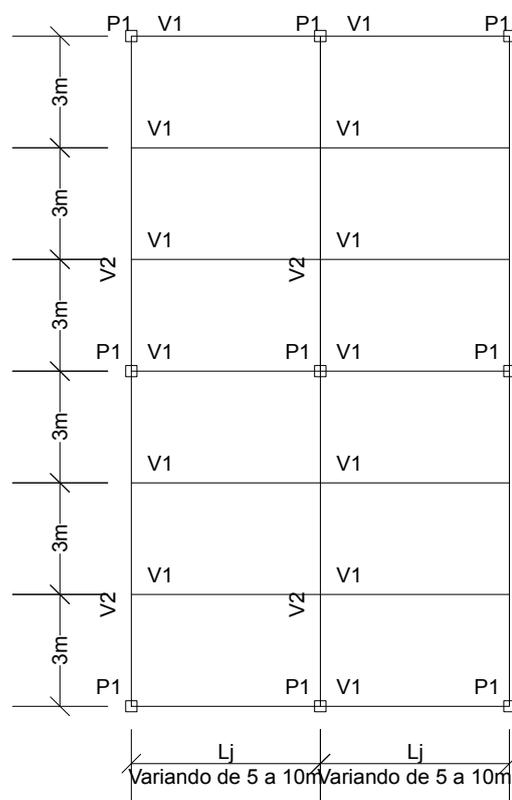


Figura 4 - Modelo Estrutural IV.

rente a norma canadense (CAN3-S16, 1989). Assim sendo, a metodologia apresentada pela norma canadense propõe que, para ocasiões onde não é viável o projeto ser executado com testes de desempenho dinâmico do sistema estrutural, a frequência fundamental do mesmo seja calculada a partir do emprego da Equação (3).

$$f_1 = 156 \sqrt{\frac{EI_T}{wL^4}} \quad (3)$$

onde

- f_1 : frequência fundamental em Hz;
- E: módulo de elasticidade do material em N/mm²;
- I_T : momento de inércia da seção transformada em mm⁴;
- w: massa da seção mista por unidade de comprimento, ao longo do vão em kg/mm;
- L: vão da viga em mm.

Observando-se as Equações (1) e (3), pode-se verificar, como mencionado anteriormente, que a NBR-8800 (NBR-8800, 1986), segue exatamente a mesma metodologia de análise prescrita pela norma canadense (CAN3-S16, 1989). As Equações (1) e (3) são análogas e a diferença existente nos resultados fornecidos por essas expressões é da ordem de 0,6%, portanto desprezível.

3.3 Guia Prático de Projeto do American Institute of Steel Construction (AISC) – Floor Vibrations due to Human Activity (Steel Design Guide Series 11)

O American Institute of Steel Construction (AISC), MURRAY *et al.* (1997), apresenta uma visão mais ampla acerca do problema de vibração em pisos. Este guia de projeto, reconhecido internacionalmente, inclui diversas variáveis importantes na formulação do problema em questão, tais como: a amplitude do movimento, caráter da resposta dinâmica (transiente ou permanente), o ambiente no qual o indivíduo se encontra, além das características pessoais de cada ser humano (peso, idade, sexo, etc.).

O critério de conforto humano do AISC (MURRAY *et al.*, 1997) é baseado na norma International Organization for Standardization (ISO 2631-2, 1989), e adequado ao tipo de utilização do piso em análise (atividade humana rítmica, caminhar, jantar, dançar, residência etc.) e pelo tipo de ambiente (interno ou externo). Nas recomendações do AISC, a frequência fundamental do sistema é determinada a partir do deslocamento estático máximo da estrutura, por meio do emprego da Equação (4):

$$f_1 = 0,18 \sqrt{\frac{g}{\Delta}} \quad (4)$$

onde

g: aceleração da gravidade medida em m/s².

Δ : deslocamento estático máximo da estrutura devido ao peso próprio em m.

4 Modelagem Computacional

Os modelos numéricos foram desenvolvidos utilizando-se técnicas usuais de discretização, via método dos elementos finitos (MEF), por meio do emprego do programa computacional ANSYS (ANSYS, 1998).

Nos modelos computacionais desenvolvidos nesta investigação, as vigas e os pilares são simulados por elementos finitos tridimensionais, denominados de BEAM44 (ANSYS, 1998), de acordo com a Figura 5, onde são considerados os efeitos de flexão e de torção.

A laje de concreto dos pisos é simulada por meio de elementos finitos de casca, denominados de SHELL63 (ANSYS, 1998), conforme ilustrado na Figura 6. Nestes elementos finitos é considerado que as seções permanecem planas no estado deformado. Considera-se, também, que os materiais empregados na análise trabalham no regime linear-elástico.

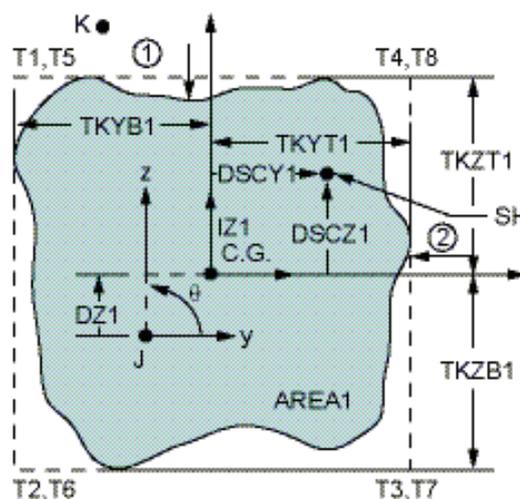


Figura 5 – Geometria do Elemento BEAM44.

O elemento BEAM44 (ANSYS, 1998) é um elemento uniaxial com capacidade de tração, compressão, torção e flexão. O elemento finito possui seis graus de liberdade em cada nó, ou seja: três translações e três rotações segundo cada um dos três eixos cartesianos. Este elemento permite a consideração de elementos com inércia variável e inclui em sua for-

mulação, também, a excentricidade existente entre o centro de gravidade das lajes e vigas de concreto, como apresentado na Figura 5.

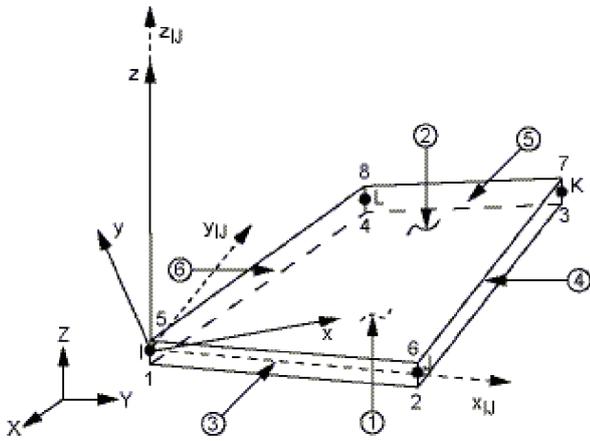


Figura 6 – Geometria do Elemento SHELL63.

O elemento de casca SHELL63 (ANSYS, 1998) incorpora as propriedades de flexão e de membrana. Cargas aplicadas no plano do elemento, como também normais ao plano deste são incorporadas em sua formulação. Este elemento finito apresenta seis graus de liberdade por nó, de forma análoga ao BEAM44 (ANSYS, 1998), conforme ilustrado na Figura 6.

As ligações existentes entre as vigas e pilares de concreto são consideradas como sendo rígidas,

modelando-se o concreto de forma monolítica. Na seqüência do texto, a Figura 7 apresenta como exemplo um modelo em elementos finitos correspondente a um dos pisos investigados neste trabalho (L_j=10,0 m), associado ao modelo estrutural I (Figura 1).

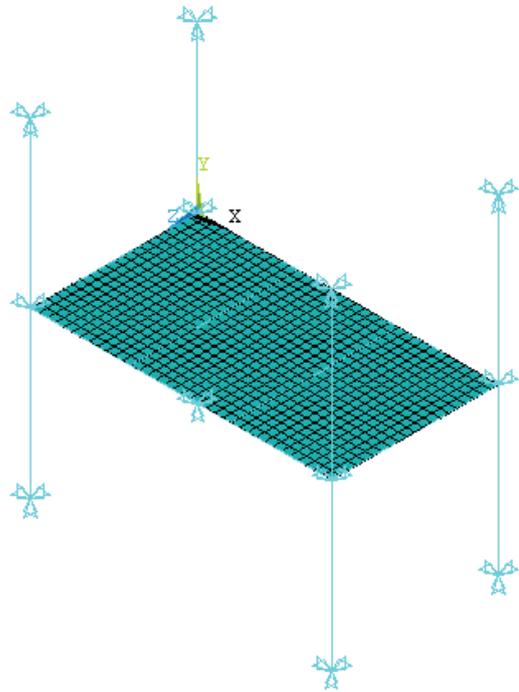


Figura 7 – Simulação em Elementos Finitos do Modelo Estrutural I (Figura 1).

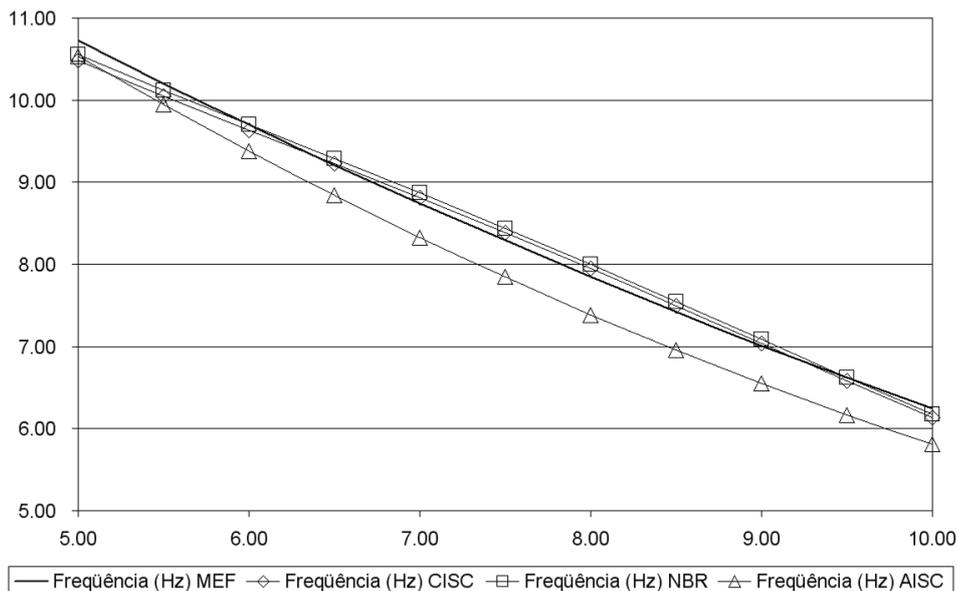


Figura 8 – Modelo Estrutural I (Caso I): comparação entre os valores das frequências fundamentais dos pisos obtidas analiticamente (NBR-8800, 1988), (CAN3-S16, 1989), (MURRAY et al., 1997) e numericamente (MEF).

5 Análise Dinâmica

A análise dinâmica é realizada sobre os modelos estruturais investigados (Modelos Estruturais I a IV), Figuras 1 a 4, de forma a serem calculadas as frequências naturais dos pisos, inicialmente, analiticamente (Equações 1 a 4) e, em seguida, numericamente, com base na utilização do programa ANSYS (ANSYS, 1998). Os modos de vibração dos pisos analisados também são obtidos e o seu comportamento é objeto de discussão no presente estudo.

Na sequência do texto, a Figura 8 e as Tabelas 1 a 3 apresentam uma comparação entre o valor da frequência fundamental, obtida analiticamente, mediante o emprego das normas de projeto (NBR-8800, 1988), (CAN3-S16, 1989), (MURRAY *et al.*, 1997), Equações (1) a (4), e, também, com base nos modelos numéricos, via método dos elementos finitos, por meio do emprego do programa computacional ANSYS (ANSYS, 1998).

Convém chamar a atenção para o fato de que na confecção do gráfico, ilustrado pela Figura 8, foi considerado o Modelo Estrutural I (Caso I) com espessura da laje de concreto igual a 0,15 m e vão L_j do referido modelo variando na faixa de 5,0 m a 10,0 m. A Figura 8 apresenta na abscissa do gráfico a variação do vão do modelo em estudo, L_j (em metros), e na ordenada deste é mostrado o valor da frequência fundamental do sistema, f_1 (em Hz), calculado de forma analítica (NBR-8800, 1988), (CAN3-S16, 1989), (MURRAY *et al.*, 1997), Equações (1) a (4), e numérica (ANSYS, 1998).

A Figura 8 ilustra, claramente, como era esperado, que na medida em que o vão dos modelos é aumentado, o valor da frequência fundamental do sistema diminui, substancialmente, tornando o modelo mais flexível e, portanto, mais suscetível a problemas de vibrações excessivas.

Tabela 1 – Cálculo da frequência fundamental do Modelo Estrutural I: CAN3-S16 (CAN3-S16, 1989) versus MEF (ANSYS, 1998).

L_j	f_x (Hz)	f_y (Hz)	CAN3-S16 f_1 (Hz)	MEF f_1 (Hz)	Δ %
5.00	44.65	10.79	10.49	10.73	2%
5.50	35.18	10.49	10.05	10.20	1%
6.00	28.31	10.25	9.64	9.70	1%
6.50	23.17	10.06	9.23	9.21	0%
7.00	19.25	9.91	8.81	8.74	1%
7.50	16.20	9.80	8.39	8.29	1%
8.00	13.79	9.72	7.95	7.85	1%
8.50	11.85	9.68	7.50	7.42	1%
9.00	10.27	9.66	7.04	7.01	0%
9.50	8.99	9.66	6.58	6.62	1%
10.00	7.93	9.66	6.13	6.25	2%

Tabela 2 – Cálculo da Frequência Fundamental do Modelo Estrutural I: NBR 8800 (NBR-8800, 1988) versus MEF (ANSYS, 1998).

L_j	f_x (Hz)	f_y (Hz)	NBR 8800 f_1 (Hz)	MEF f_1 (Hz)	Δ %
5.00	44.94	10.86	10.55	10.73	2%
5.50	35.41	10.56	10.12	10.20	1%
6.00	28.49	10.31	9.70	9.70	0%
6.50	23.32	10.12	9.29	9.21	1%
7.00	19.38	9.97	8.87	8.74	1%
7.50	16.31	9.86	8.44	8.29	2%
8.00	13.88	9.79	8.00	7.85	2%
8.50	11.93	9.74	7.54	7.42	2%
9.00	10.34	9.72	7.08	7.01	1%
9.50	9.04	9.72	6.62	6.62	0%
10.00	7.98	9.72	6.17	6.25	1%

Tabela 3 – Cálculo da Frequência Fundamental do Modelo Estrutural I: AISC (MURRAY *et al.*, 1997) versus MEF (ANSYS, 1998).

L_j	$\delta_{est\ máx}$ (mm)	AISC f_1 (Hz)	MEF f_1 (Hz)	Δ %
5.00	2.86	10.53	10.73	2%
5.50	3.22	9.94	10.20	3%
6.00	3.62	9.38	9.70	3%
6.50	4.07	8.84	9.21	4%
7.00	4.58	8.33	8.74	5%
7.50	5.17	7.84	8.29	5%
8.00	5.83	7.38	7.85	6%
8.50	6.57	6.95	7.42	6%
9.00	7.41	6.55	7.01	7%
9.50	8.35	6.17	6.62	7%
10.00	9.41	5.81	6.25	7%

Dando sequência a análise, observa-se que os resultados apresentados nas Tabelas 1 a 3 indicam que a diferença máxima existente entre o valor da frequência fundamental dos pisos, f_1 , calculado de acordo com o emprego das Expressões (1) a (4), (NBR-8800, 1988), (CAN3-S16, 1989), (MURRAY *et al.*, 1997), e os valores numéricos (ANSYS, 1998) é da ordem de 7%, Tabela 3, sendo considerada aceitável, sob o ponto de vista de projeto.

Na maioria dos casos analisados esta diferença é muito pequena, sendo inferior a 3%, de acordo com as Tabelas 1 a 3, demonstrando que para modelos estruturais de geometria relativamente simples, Figuras 1 a 4, os procedimentos expeditos propostos em diversas normas e recomendações de projeto (NBR-8800, 1988), (CAN3-S16, 1989), (MURRAY *et al.*), para o cálculo da frequência f_1 , fornecem resultados aceitáveis.

Ressalta-se ainda, que as maiores diferenças encontradas entre os valores analíticos e numéricos (cálculo da frequência f_1) são provenientes do AISC, (MURRAY *et al.*, 1997), conforme ilustrado pela Tabela 3, ressaltando que essas diferenças são pequenas e da ordem de 5% a 7%.

Na seqüência do trabalho são apresentados, agora, os valores numéricos (ANSYS, 1998), referentes à frequência fundamental, f_1 , dos diversos sistemas estruturais em estudo, mostrados nas Tabelas 4 a 11. São considerados, agora, os quatro modelos (Modelos Estruturais I a IV, Figuras 1 a 4), e os resultados são

Tabela 4 – Frequência fundamental do Modelo Estrutural I para o Caso I, via MEF (ANSYS, 1998).

Lj (m)	Modelo Estrutural I - f_1 (Hz)		
	V1 (0,2x0,5)m		
	e=0,10m	e=0,12m	e=0,15m
5,0	11,06	10,90	10,73
5,5	10,52	10,37	10,20
6,0	10,00	9,85	9,70
6,5	9,49	9,57	9,21
7,0	9,00	8,86	8,74
7,5	8,52	8,39	8,29
8,0	8,06	7,94	7,85
8,5	7,62	7,51	7,42
9,0	7,19	7,09	7,01
9,5	6,79	6,69	6,63
10,0	6,40	6,31	6,25

Tabela 5 - Frequência fundamental do Modelo Estrutural I para o Caso II, via MEF (ANSYS, 1998).

Lj (m)	Modelo Estrutural I - f_1 (Hz)		
	V1 (0,2x0,475)m	V1 (0,2x0,45)m	V1 (0,2x0,425)m
	e=0,10m	e=0,12m	e=0,15m
5,0	11,02	10,87	10,72
5,5	10,42	10,31	10,18
6,0	9,84	9,76	9,66
6,5	9,28	9,22	9,16
7,0	8,73	8,70	8,67
7,5	8,19	8,20	8,20
8,0	7,69	7,71	7,75
8,5	7,20	7,25	7,31
9,0	6,75	6,81	6,89
9,5	6,32	6,40	6,49
10,0	5,96	6,01	6,01

apresentados mediante os Casos I e II, descritos na metodologia de análise (item 2 deste artigo).

Um ponto importante que deve ser destacado, diz respeito à geometria dos modelos estruturais, pois a solução analítica (NBR-8800, 1988), (CAN3-S16, 1989), (MURRAY *et al.*, 1997), considera modelos baseados em vigas biapoiadas e os Modelos Estruturais II, III e IV, Figuras 2 a 4, são constituídos por lajes contínuas nas duas direções. Ou seja, analiticamente, o valor da frequência fundamental para os diversos pisos continua a ser obtido como no caso referente ao Modelo Estrutural I, Figura 1.

Tabela 6 – Frequência fundamental do Modelo Estrutural II para o Caso I, via MEF (ANSYS, 1998).

Lj (m)	Modelo Estrutural I - f_1 (Hz)		
	V1 (0,2x0,475)m	V1 (0,2x0,45)m	V1 (0,2x0,425)m
	e=0,10m	e=0,12m	e=0,15m
5,0	11,02	10,87	10,72
5,5	10,42	10,31	10,18
6,0	9,84	9,76	9,66
6,5	9,28	9,22	9,16
7,0	8,73	8,70	8,67
7,5	8,19	8,20	8,20
8,0	7,69	7,71	7,75
8,5	7,20	7,25	7,31
9,0	6,75	6,81	6,89
9,5	6,32	6,40	6,49
10,0	5,96	6,01	6,01

Tabela 7 – Frequência fundamental do Modelo Estrutural II para o Caso II, via MEF (ANSYS, 1998).

Lj (m)	Modelo Estrutural II - f_1 (Hz)		
	V1 (0,2x0,475)m	V1 (0,2x0,45)m	V1 (0,2x0,425)m
	e=0,10m	e=0,12m	e=0,15m
5,0	9,97	9,78	9,59
5,5	9,48	9,30	9,12
6,0	9,02	8,86	8,70
6,5	8,60	8,45	8,32
7,0	8,22	8,08	7,97
7,5	7,86	7,74	7,64
8,0	7,52	7,42	7,34
8,5	7,20	7,12	7,06
9,0	6,89	6,83	6,79
9,5	6,60	6,56	6,54
10,0	6,27	6,29	6,29

Tabela 8 – Frequência fundamental do Modelo Estrutural III para o Caso I, via MEF (ANSYS, 1998).

Lj (m)	Modelo Estrutural III - f_1 (Hz)		
	V1 (0,2x0,5)m		
	e=0,10m	e=0,12m	e=0,15m
5,0	10,24	9,65	9,89
5,5	9,76	9,20	9,42
6,0	9,31	8,79	9,00
6,5	8,90	8,40	8,60
7,0	8,51	8,05	8,24
7,5	8,14	7,71	7,89
8,0	7,78	7,39	7,57
8,5	7,44	7,09	7,25
9,0	7,11	6,79	6,95
9,5	6,78	6,49	6,64
10,0	6,46	6,19	6,34

Por outro lado, tal fato não ocorre com os modelos numéricos mais refinados, desenvolvidos mediante o emprego do Método dos Elementos Finitos (MEF), pois estes representam com mais fidelidade o comportamento global do sistema.

Tabela 9 – Frequência fundamental do Modelo Estrutural III para o Caso II, via MEF (ANSYS, 1998).

Lj (m)	Modelo Estrutural III - f_1 (Hz)		
	V2 (0,2x0,475)m	V2 (0,2x0,45)m	V2 (0,2x0,425)m
	e=0,10m	e=0,12m	e=0,15m
5,0	10,07	9,89	10,25
5,5	9,58	9,42	9,74
6,0	9,12	8,99	9,27
6,5	8,70	8,59	8,83
7,0	8,30	8,21	8,41
7,5	7,92	7,86	8,00
8,0	7,56	7,52	7,60
8,5	7,20	7,20	7,60
9,0	6,84	6,88	6,82
9,5	6,49	6,56	6,43
10,0	6,14	6,24	6,05

Observando-se as Tabelas 4 a 11, com referência as diferenças existentes entre os resultados analíticos encontrados para a frequência fundamental dos diversos pisos, f_1 , mediante o emprego das Equações (1) a (4), (NBR-8800, 1988), (CAN3-S16, 1989),

Tabela 10 – Frequência fundamental do Modelo Estrutural IV para o Caso I, via MEF (ANSYS, 1998).

Lj (m)	Modelo Estrutural IV - f_1 (Hz)		
	V1 (0,2x0,5)m		
	e=0,10m	e=0,12m	e=0,15m
5,0	9,84	9,66	9,49
5,5	9,37	9,20	9,03
6,0	8,94	8,77	8,62
6,5	8,54	8,38	8,25
7,0	8,18	8,03	7,91
7,5	7,84	7,70	7,60
8,0	7,53	7,40	7,31
8,5	7,24	7,12	7,31
9,0	6,96	6,85	6,79
9,5	6,70	6,60	6,55
10,0	6,46	6,37	6,33

Tabela 11 – Frequência fundamental do Modelo Estrutural IV para o Caso II, via MEF (ANSYS, 1998).

Lj (m)	Modelo Estrutural IV - f_1 (Hz)		
	V2 (0,2x0,475)m	V2 (0,2x0,45)m	V2 (0,2x0,425)m
	e=0,10m	e=0,12m	e=0,15m
5,0	9,85	9,67	9,49
5,5	9,36	9,19	9,03
6,0	8,75	8,75	8,61
6,5	8,36	8,36	8,24
7,0	8,00	8,00	7,90
7,5	7,66	7,66	7,58
8,0	7,35	7,35	7,29
8,5	7,06	7,06	7,02
9,0	6,78	6,78	6,76
9,5	6,52	6,52	6,52
10,0	6,27	6,27	6,29

(MURRAY *et al.*, 1997), em relação à solução numérica (ANSYS, 1998), percebe-se que estas aumentam, mas não de forma significativa. A diferença máxima encontrada ao longo desta investigação, considerando-se todos os casos estudados (Tabelas 4 a 11), foi da ordem de 10%.

Esses resultados reforçam a idéia de que as Equações (1) a (4), (NBR-8800, 1988), (CAN3-S16, 1989), (MURRAY *et al.*, 1997) conseguem estimar com ótima precisão o valor da frequência fundamental de modelos simplificados (Modelo Estrutural I). Todavia,

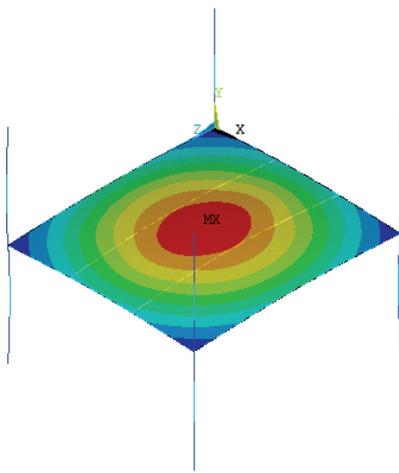
na medida em que a geometria do sistema estrutural torna-se mais elaborada, a solução analítica começa a não produzir bons resultados e a solução via método dos elementos finitos torna-se imperativa.

Verificando-se os valores das frequências naturais apresentadas nas Tabelas 4 a 11, identifica-se, com clareza, que à medida que espessura das lajes de concreto dos pisos é aumentada (0,10 m até 0,15 m) a frequência fundamental dos modelos diminui. Este fato é ainda mais evidenciado em conjunto com um aumento pronunciado do vão L_j (Figuras 1 a 4) dos modelos (5,0 m para 10,0 m), Tabelas 4, 6, 8 e 10. Tal análise foi feita mantendo-se a rigidez das vigas V1 constante (Caso I).

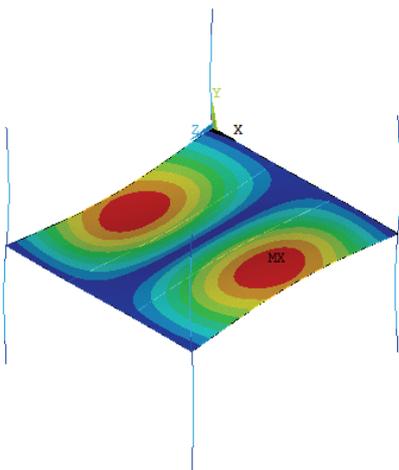
A mesma situação ocorre, em praticamente to-

dos os casos, quando a rigidez das vigas V1 é modificada (diminuída), considerando-se, agora, o Caso II, em conjunto com um aumento da espessura das lajes dos modelos (0,10 m até 0,15 m) e, ainda, um aumento significativo do vão dos pisos, L_j , Figuras 1 a 4, (5,0 m para 10,0 m), conforme ilustrado nas Tabelas 5, 7, 9 e 11.

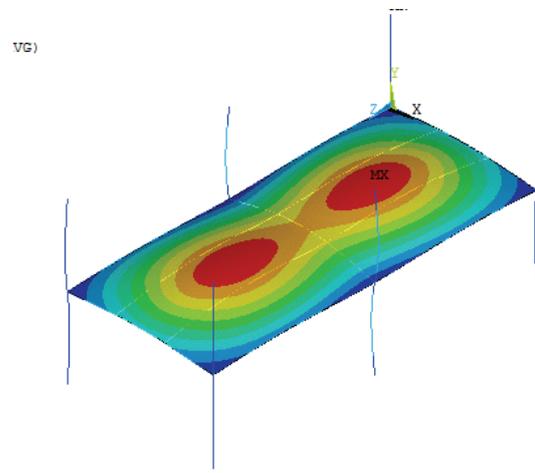
A seguir, as Figuras 9 a 12 ilustram o primeiro e segundo modos naturais de vibração para os Modelos Estruturais I a IV, considerando-se apenas $L_j=10$ m, Figuras 1 a 4, correspondente ao caso mais flexível. Pode-se verificar que, de forma geral, o primeiro modo de vibração (modo fundamental de vibração) desses pisos apresenta predominância dos efeitos de flexão, Figuras 9 a 12.



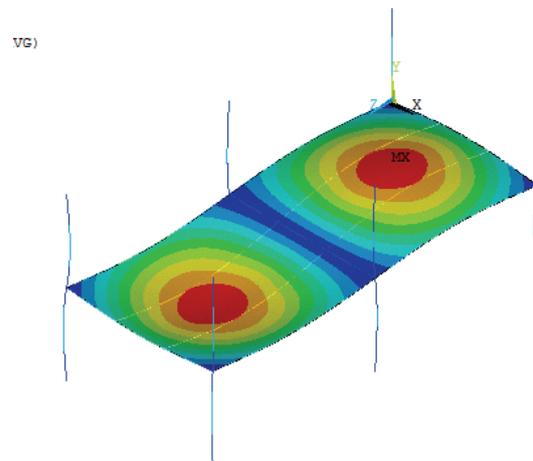
(a) Modo de vibração referente à primeira frequência natural: $f_{01}=5,99$ Hz.



(b) Modo de vibração referente à segunda frequência natural: $f_{02}=9,50$ Hz.



(a) Modo de vibração referente à primeira frequência natural: $f_{01}=6,29$ Hz.



(b) Modo de vibração referente à segunda frequência natural: $f_{02}=6,43$ Hz.

Figura 9 – Modos de vibração. Modelo Estrutural I.

Figura 10 – Modos de vibração. Modelo Estrutural II.

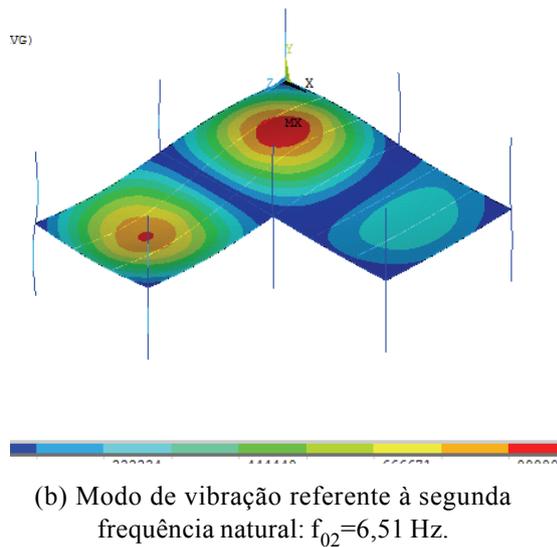
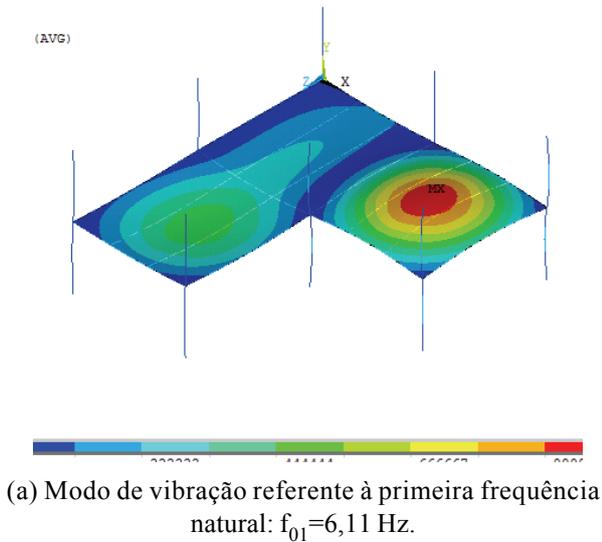


Figura 11 – Modos de vibração. Modelo Estrutural III.

No que tange aos sistemas estruturais investigados neste trabalho, verifica-se, por exemplo, que, a destinação desses pisos, considerando-se o caso mais flexível ($L_j=10$ m) em todos modelos analisados (Modelos Estruturais I a IV), Figuras 1 a 4, que a frequência fundamental mais baixa foi da ordem de 6,0 Hz, Tabelas 4 a 11. Nesta situação, esses pisos poderiam ser empregados até mesmo para escritórios, Tabela 14, de acordo com a NBR-6118 (NBR-6118, 2003), sem apresentar níveis de vibrações excessivas.

6 Recomendações de Projeto

No que tange a questão associada ao problema de vibrações excessivas, de acordo com a NBR-6118 (NBR-6118, 2003), o comportamento dinâmico de um sistema estrutural é considerado satisfatório quando

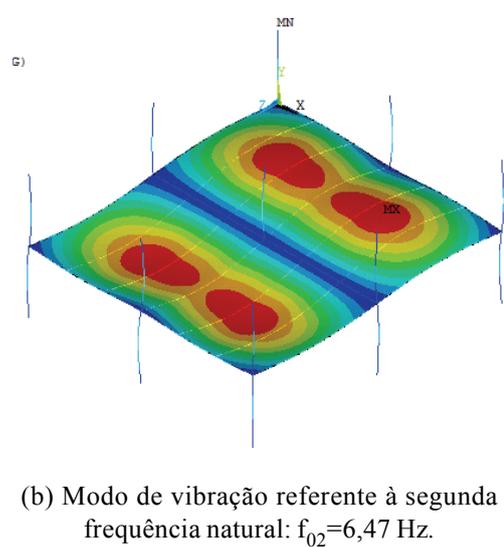
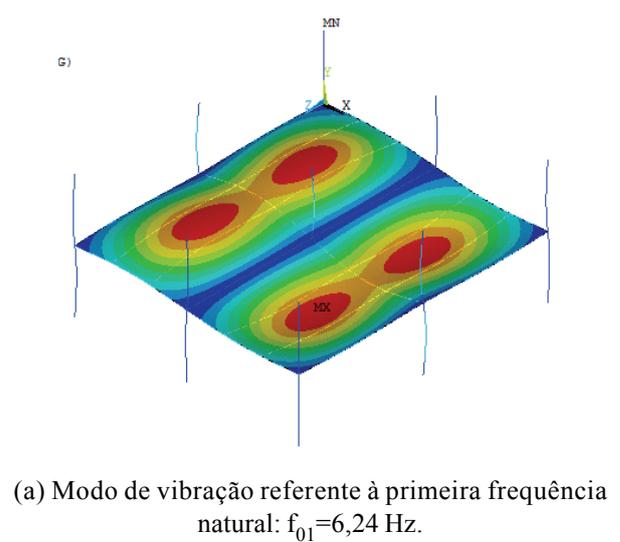


Figura 12 – Modos de vibração. Modelo Estrutural IV.

a seguinte relação é verificada:

$$f_1 > 1,2 f_{crit} \quad (5)$$

onde

f_1 : frequência fundamental do sistema em Hz;
 f_{crit} : frequência crítica que depende da destinação do sistema estrutural.

Tabela 12 – Frequências críticas (NBR-6118, 2003).

Casos Especiais	f_{crit} (Hz)
Ginásio de esportes	8,0
Salas de dança ou concerto	7,0
Escritórios	3,0 a 4,0
Salas de concerto com cadeiras fixas	3,4
Passarelas de pedestres ou ciclistas	1,6 a 4,5

A Tabela 12 apresenta valores pré-definidos para frequências consideradas críticas por parte da norma brasileira (NBR-6118, 2003), no que diz respeito a alguns casos de estruturas especiais submetidas a vibrações induzidas pela ação de pessoas.

7 Considerações Finais

A presente investigação apresenta uma contribuição no que diz respeito à análise dinâmica de pisos de concreto armado (análise modal: frequências naturais e modos de vibração), dando ênfase a um procedimento bastante relevante (cálculo analítico), mas muito pouco utilizado na prática de projeto, no que diz respeito, principalmente, ao comportamento dinâmico de estruturas. Tal fato pode ser um indicativo para a ocorrência de determinados problemas de vibração excessiva que ocorrem frequentemente em sistemas estruturais correntes de engenharia civil.

A frequência fundamental de diversos modelos estruturais em concreto armado foi obtida analiticamente, mediante o emprego de recomendações e normas de projeto (NBR-8800, 1986), (CAN3-S16, 1989) e (MURRAY *et al.*, 1997). Os resultados analíticos foram comparados com aqueles obtidos numericamente, via método dos elementos finitos, por meio do programa ANSYS (ANSYS, 1998).

Ao longo da análise foi constatado que os procedimentos expeditos de cálculo são bastante úteis para a estimativa da frequência fundamental de modelos estruturais relativamente simples, fornecendo bons resultados em comparação com os modelos computacionais mais refinados.

Com base no exposto anteriormente, os projetistas de estruturas devem ser alertados para o fato de que um cálculo simples e rápido, a partir da obtenção da frequência fundamental de um dado sistema estrutural, pode vir a evitar problemas associados a vibrações excessivas em estruturas civis; e, em última análise, desconforto humano, os quais nem sempre são muito fáceis de serem resolvidos, após a execução da obra.

No que tange aos pisos investigados ao longo do presente estudo, considerando-se a faixa de frequência encontrada na análise, da ordem de 6,0 Hz a 11,0 Hz, pode-se dizer, com base em recomendações de projeto da norma brasileira (NBR-6118, 2003), que esses modelos poderiam perfeitamente ser utilizados para escritórios. Contudo, a maioria dos modelos investigados não o seria, por exemplo, para atividades associadas à dança e esportes.

Finalmente, ressalta-se a importância do projetista de estruturas possuírem o conhecimento da atividade a ser desempenhada sobre o sistema estrutural, visando o desenvolvimento de um projeto mais racional, de acordo com procedimentos correntes previstos nas normas e recomendações de projeto, assim como pensando em atender, também, a critérios de conforto humano.

8 Referências Bibliográficas

- ANSYS. Swanson Analysis Systems, Inc., P.O. Box 65, Johnson Road, Houston, PA, 15342-0065, Version 5.5, Basic Analysis Procedures, Second edition, 1998.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR 6118 – Projeto de Estruturas de Concreto – Procedimentos, Rio de Janeiro, Brasil, 2003.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR 8800 – Projeto e Execução de Estruturas de Aço de Edifícios (Método dos Estados Limites), pp. 110-113 (Anexo N – Vibrações em Pisos) e pp. 33-41 (Condições Específicas para Dimensionamento de Vigas Mistas), Rio de Janeiro, Brasil, 1986.
- BACHMANN, H.; e AMMANN, W. Vibrations in Structures Induced by Man and Machines, IABSE Structural Engineering Document 3E, International Association for Bridges and Structural Engineering, ISBN 3-85748-052-X, 1987.
- CANADIAN STANDARDS CAN3-S16, 1-M89: Steel Structures for Buildings – Limits States Design. Appendix G: Guide for floor Vibration. Canadian Standards Association, Rexdale, Ontario, 1989.
- FAISCA, R. G. Caracterização de Cargas Dinâmicas Geradas por Atividades Humanas. Tese de Doutorado – COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, Brasil, 2003.
- INTERNATIONAL ORGANIZATION FOR STANDARDIZATION. ISO 2631-2: Evaluation of Human Exposure to Whole-Body Vibration – Part 2: Human Exposure to 188 Continuous and Shock-Induced Vibrations in Buildings (1 to 80 Hz), Switzerland, 1989.
- MELLO, A. V. DE A. Vibrações em Pisos de Edificações Induzidas por Atividades Humanas. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, PGECIV, Faculdade de Engenharia, FEN, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, UERJ, Rio de Janeiro, Brasil, 2005.
- MELLO, A. V. DE A., SILVA J. G. S. DA, LIMA L. R. O. DE. Análise de Pisos de Edificações Submetidos a Ações Dinâmicas Provenientes do Caminhar Humano. CILAMCE XXVI, Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering, Guarapari/ES, CD-ROM, 14 páginas, 2005.
- MOREIRA, B. C. Avaliação Comparativa de Pisos de Edificações em Estrutura Metálica Quanto aos Critérios de Vibração, 2004. 182f. Dissertação de Mestrado – UFOP, Ouro Preto, MG, Brasil, 2004.
- MURRAY T. M., ALLEN D. E., UNGAR E. E. Floor Vibrations Due to Human Activity, Steel Design Guide Series 11, AISC – American Institute of Steel Construction, 2003.
- VARELA, W. D. Modelo Teórico-Experimental para Análises de Vibrações Induzidas por Pessoas Caminhando sobre Lajes de Edifícios, Tese de Doutorado – COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, Brasil, 2004.