

# Análise de Sensibilidade e Otimização de Estruturas Submetidas a Vibrações Aleatórias

Élcio Cassimiro Alves<sup>1</sup>  
Luiz Eloy Vaz<sup>2</sup>  
Mário Kataoka Filho<sup>3</sup>

## Resumo

Este trabalho tem por objetivo apresentar o problema de análise de sensibilidade e otimização de estruturas submetidas a vibrações aleatórias. Apesar deste tipo análise ser necessária nos projetos de estruturas que serão submetidas as cargas sísmicas, cargas aerodinâmicas ou as vibrações geradas durante a fase de lançamento em foguetes, o problema de otimização estrutural envolvendo este tipo de carregamento foi pouco estudado. A análise de sensibilidade foi realizada utilizando-se o Método Analítico (MA) para determinação dos gradientes das equações que representam as funções objetivo e restrições. Para a validação do desenvolvimento dessas expressões utilizou-se o Método das Diferenças Finitas. Para a solução do problema de otimização utilizou-se o algoritmo baseado no Método dos Pontos Interiores (Herskovits,1995) e o de Programação Quadrática Sequencial, baseado no método de Lemke (1968). Quatro exemplos de estruturas reticuladas são apresentados para mostrar a aplicabilidade da metodologia, sendo que o primeiro exemplo é apresentado para validar a formulação.

## 1 Introdução

A análise de estruturas sob vibração aleatória é um problema em que não se consegue prever o efeito da excitação em um determinado instante de tempo e conseqüentemente não consegue-se determinar a resposta da estrutura. A excitação e a resposta ficam caracterizadas por grandezas estatísticas, tais como média e o desvio padrão. Essas excitações são geradas, por exemplo, devido ao efeito de um terremoto, excitação devido ao efeito do lançamento de foguete, maremotos, rajadas de vento em estruturas aeronáuticas, etc.

Até o presente momento os problemas de otimização estrutural envolvendo vibração aleatória foram poucos estudados. Dos trabalhos mais recentes destaca-se o artigo de Kin e Wen (1990) onde os pesquisadores fazem um estudo da confiabilidade estrutural levando em conta o efeito combinado de cargas aleatórias. Neubert (1993) faz um estudo de maximização do amortecimento estrutural de modo a diminuir o efeito da vibração aleatória sobre uma estrutura. Lipton (1993) faz um estudo da

distribuição ótima de enrijecedores em placas submetidas a múltiplos casos de cargas transversais aleatórias. Alves (2001) apresenta a formulação da análise de sensibilidade para estruturas submetidas a carregamento aleatório. Alves (2002), no seu trabalho de doutorado, apresenta diversos exemplos de aplicações de otimização de estruturas reticuladas submetidas a vibrações aleatórias.

## 2 A formulação geral do problema

O problema de otimização de estruturas submetidas a vibrações aleatórias pode ser formulado da seguinte maneira:

*Deseja-se minimizar a massa de uma estrutura submetida a vibração aleatória, de modo que, em um determinado ponto da estrutura, a probabilidade do deslocamento ou aceleração ser maior que um deslocamento ou aceleração definida seja menor do que uma probabilidade preestabelecida.*

1 Aluno de Doutorado do Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE) (elcio@dem.inpe.br).

2 Professor Orientador – UFF.

3 Professor Orientador – Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE).

Dessa forma, pode-se determinar uma faixa na qual a estrutura esteja trabalhando com uma certa segurança para o carregamento em questão. Analiticamente, o problema pode ser escrito da seguinte maneira:

$$\text{Min } P = \rho \sum V_i$$

Sujeito a:

$$\begin{aligned} \Pr(x_i > x_{\max}) &< P_{\max} \\ \Pr(x_i) &< P_{\max 1} \\ v_i &\leq v_i \leq v_u \end{aligned} \quad (1)$$

onde

$\rho$  – massa específica do material;

$v_i$  – variável de projeto, que pode ser a área da seção transversal, as dimensões (b,h) ou a espessura da camada de uma placa laminada;

$x_i$  – deslocamento de um determinado ponto da estrutura;

$x_{\max}$  – deslocamento máximo admissível no ponto  $x_i$

$x_i$  – aceleração gerada num determinado ponto da estrutura;

$x_{\max}$  – aceleração máxima preestabelecida no estudo;

$P_{\max}$  – probabilidade máxima estabelecida pelo usuário, (10%, 15%).

$v_i$  e  $v_u$  – limites inferiores e superiores das variáveis de projeto

No problema acima tem-se que a  $\Pr(x_i > x_{\max})$  é dada pela seguinte expressão:

$$\Pr(x_i > x_{\max}) = \int_{x_{\max}}^{\infty} p(x_i) dx \quad (2)$$

onde  $p(x_i)$  é função de densidade de probabilidade dada por

$$p(x_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{x_i}} e^{-\left[\frac{(x_i - \bar{x}_i)^2}{2\sigma_{x_i}^2}\right]} \quad (3)$$

Para o problema estudado, os processos são ergódicos com média nula. Dessa forma a expressão (3) se reduz a:

$$p(x_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{x_i}} e^{-\left[\frac{(x_i)^2}{2\sigma_{x_i}^2}\right]} \quad (4)$$

Expressões semelhantes podem ser deduzidas para as acelerações, somente substituindo  $x_i$  por  $\ddot{x}_i$ . O desvio padrão da resposta da estrutura submetida a vibração aleatória é dada por (Clough, 1975):

$$\sigma_x^2 = R_x(0) = \frac{1}{2\pi} \phi \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} S_f(\bar{w})/H(\bar{w})^2 J d\bar{w} \right] \phi^T \quad (5)$$

e a expressão para o desvio padrão da aceleração em um determinado ponto pode ser escrito como

$$\sigma_{x''}^2 = R_{x''}(0) =$$

$$\frac{1}{2\pi} \phi \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{w}^4 S_x(\bar{w})/H(\bar{w})^2 d\bar{w} \right] \phi^T \quad (6)$$

Para o algoritmo de otimização, as restrições laterais do problema de otimização são transformadas em restrição de desigualdade. Dessa forma tem-se que:

$$v_i \leq v \rightarrow v_i - v \leq 0 \quad (7)$$

$$v \leq v_u \rightarrow v - v_u \leq 0 \quad (8)$$

### 3 O algoritmo de otimização utilizado

Para resolver o problema proposto foram utilizados o algoritmo baseado no Método dos Pontos Interiores (Herskovits 1995) e o algoritmo de Programação Quadrática Sequencial, baseado no método de Lemke(1968). Esses algoritmos pertencem à classe dos métodos gradientes. Para a utilização desses métodos é necessária a determinação dos gradientes da função objetivo e restrições, para a determinação da direção de busca. Dessa forma foi realizado um estudo da análise de sensibilidade da resposta da estrutura, quando submetida à vibrações aleatórias, utilizada para a determinação dos gradientes das restrições.

### 4 Análise de sensibilidade

O objetivo da análise da sensibilidade é verificar como a função objetivo e as restrições variam quando se faz uma pequena mudança em uma determinada variável de projeto. Dessa forma pode-se determinar quais as variáveis que mais influenciam o problema de otimização.

Como foi mostrado anteriormente, a restrição de projeto no problema de otimização é dada por:

$$Pr(x) = \int_{x_{max}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}} dx \quad (9)$$

Derivando-se a expressão (9) em relação a uma variável de projeto, tem-se que:

$$\frac{\partial Pr(x)}{\partial v} = \frac{\partial Pr(x)}{\partial \sigma_x} \frac{\partial \sigma_x}{\partial v} = \int_{y_{max}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( -\frac{1}{\sigma_x^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}} + \frac{x^2}{\sigma_x^4} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}} \right) dy \frac{\partial \sigma_x}{\partial v} \quad (10)$$

A derivada da função de probabilidade é função da derivada do desvio padrão em relação a variável de projeto.

#### 4.1 Sensibilidade do desvio padrão

Mostra-se que o desvio padrão pode ser determinado em função da autocorrelação da resposta como (Clough, 1975):

$$\sigma^2 = R_x(0) \quad (11)$$

Derivando-se ambos os lados em relação a variável de projeto, tem-se que:

$$\frac{\partial \sigma^2}{\partial v} = \frac{\partial R_x(0)}{\partial v} \rightarrow 2\sigma \frac{\partial \sigma}{\partial v} = \quad (12)$$

$$\frac{\partial R_x(0)}{\partial v} \rightarrow \frac{\partial \sigma}{\partial v} = \frac{1}{2\sigma} \frac{\partial R_x(0)}{\partial v}$$

Na expressão (12) percebe-se que a derivada do desvio padrão é função do próprio desvio padrão e da derivada da autocorrelação da resposta.

#### 4.2 Sensibilidade da autocorrelação da resposta

Mostra-se que a autocorrelação da resposta no instante  $\tau$  igual a zero é dada por (Clough, 1975):

$$R_x(0) = \frac{1}{2\pi} \phi^T \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} S_f(\bar{w})/H(\bar{w})^2 J d\bar{w} \right] \phi \quad (13)$$

Derivando-se a expressão (13) em relação variável de projeto, tem-se que:

$$\frac{\partial R_x(0)}{\partial v} = \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{\partial \phi^T}{\partial v} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} S_f(\bar{w})/H(\bar{w})^2 d\bar{w} \right] \phi + \phi^T \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial S_f(\bar{w})}{\partial v} / H(\bar{w})^2 d\bar{w} \right] \phi \right\} \quad (14)$$

$$\phi^T \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} S_f(\bar{w}) \frac{\partial / H(\bar{w})^2}{\partial v} d\bar{w} \right] \phi + \phi^T \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} S_f(\bar{w})/H(\bar{w})^2 d\bar{w} \right] \frac{\partial \phi}{\partial v}$$

Na expressão (14) tem-se que,

$$\left[ \phi^T \int_{-\infty}^{+\infty} S_f(\bar{w})/H(\bar{w})^2 d\bar{w} \frac{\partial \phi}{\partial v} \right]^T \quad (15)$$

$$\frac{\partial \phi^T}{\partial v} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \{ / H(\bar{w})^2 \}^T S_f(\bar{w})^T d\bar{w} \right] \phi =$$

$$= \frac{\partial \phi^T}{\partial v} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} S_f(\bar{w})/H(\bar{w})^2 d\bar{w} \right] \phi$$

Substituindo-se a expressão (15) na expressão (14) tem-se:

$$\frac{\partial R_x(0)}{\partial v} = \frac{1}{2\pi} \left\{ 2 \frac{\partial \phi^T}{\partial v} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} S_f(\bar{w})/H(\bar{w})^2 d\bar{w} \right] \phi + \phi^T \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial S_f(\bar{w})}{\partial v} / H(\bar{w})^2 d\bar{w} \right] \phi \right\} \quad (16)$$

$$\phi^T \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} S_f(\bar{w}) \frac{\partial / H(\bar{w})^2}{\partial v} d\bar{w} \right] \phi \}$$

Na expressão (16) as derivadas  $\frac{\partial \phi}{\partial v}$ ,  $\frac{\partial S_f(w)}{\partial v}$ ,

$\frac{\partial / H(\bar{w})^2}{\partial v}$  são as derivadas dos autovetores, PSDF

das cargas generalizadas e da função de resposta em frequência. Para a determinação da derivada dos autovetores utilizou-se o método modal modificado, proposto por Wang (1991). A derivada da PSDF das cargas generalizadas pode ser obtida a partir da expressão:

$$S_f(\bar{w}) = \phi^T S_F(\bar{w}) \phi \quad (17)$$

Derivando-se a expressão (17), tem-se que:

$$\frac{\partial S_f(\bar{w})}{\partial v} = \frac{\partial \phi^T}{\partial v} \left[ S_F(\bar{w}) \right] \phi + \quad (18)$$

$$\phi^T \frac{\partial S_F(\bar{w})}{\partial v} \phi + \phi^T S_F(\bar{w}) \frac{\partial \phi}{\partial v}$$

Sabendo-se que:

$$\frac{\partial S_F(\bar{w})}{\partial v} = 0 \quad (\text{Não depende de } v_i) \quad (19)$$

a expressão (18) se reduz a:

$$\frac{\partial S_f(\bar{w})}{\partial v} = \frac{\partial \phi^T}{\partial v} \left[ S_F(\bar{w}) \right] \phi + \phi^T S_F(\bar{w}) \frac{\partial \phi}{\partial v} \quad (20)$$

Da expressão (20), tem-se que

$$\left[ \phi^T S_F(\bar{w}) \frac{\partial \phi}{\partial v} \right]^T = \frac{\partial \phi^T}{\partial v} S_F(\bar{w}) \phi \quad (21)$$

Substituindo-se a expressão (21) em (20), tem-se:

$$\frac{\partial S_f(\bar{w})}{\partial v} = 2 \frac{\partial \phi^T}{\partial v} \left[ S_F(\bar{w}) \right] \phi \quad (22)$$

A derivada da função de resposta em frequência com relação a um variável de projeto é dada por:

$$\frac{\partial |H_i(\bar{w})|^2}{\partial v} = \frac{\partial |H_i(\bar{w})|^2}{\partial w_i} \frac{\partial w_i}{\partial v}, \quad (23)$$

onde

$$|H_i(\bar{w})|^2 = \frac{1}{w_i^4 \left( \left[ 1 - \left( \frac{w}{w_i} \right)^2 \right]^2 + \left[ 2\xi \frac{w}{w_i} \right]^2 \right)} \quad (24)$$

e sua derivada em relação a  $w_i$  é:

$$\frac{\partial |H_i(\bar{w})|^2}{\partial w_i} = \quad (25)$$

$$-4 \frac{w_i (w_i^2 - w^2 + 2\xi^2 w^2)}{(w_i^4 - 2w_i^2 w^2 + w^4 + 4\xi^2 w^2 w_i^2)^2}$$

onde  $\frac{\partial w_i}{\partial v}$  é a derivada da frequência em função do autovalor, que é dada por

$$\frac{\partial w_i}{\partial v} = \frac{1}{2w_i} \frac{\partial \lambda_i}{\partial v} = \quad (26)$$

$$\frac{1}{2w_i} \frac{\phi_p^t (\partial K / \partial v - \lambda_p \partial M / \partial v) \phi_p}{\phi_p^t M \phi_p}$$

As derivadas das matrizes de massa e rigidez que aparecem na expressão (26) são determinadas explicitamente para estruturas reticuladas. Para a determinação das frequências e os modos normais do problema de autovalor utilizou-se o método de Householder com QL (ver Wilkinson and Reinsch, 1971).

## 5 Exemplos de aplicação da formulação proposta

Para os exemplos apresentados nos próximos itens utilizou-se uma excitação do tipo *ruído branco* e uma faixa de frequência de 10 a 200 Hz. Utilizou-se uma excitação do tipo ruído branco por ser constante para a faixa de frequência estudada e fácil de ser introduzida no programa de análise. Para fazer as integrações apresentadas anteriormente utilizou-se o método de Newton-Cotes (Bathe, 1992).

### 5.2 Exemplo 1 – Pórtico de duas barras

Este exemplo é um pórtico composto de duas barras com a configuração apresentada na Figura 1. A excitação aleatória do pórtico é do tipo ruído branco, aplicada na direção horizontal, no ponto 2, com o valor de 0,2 g<sup>2</sup>/Hz. Iniciou-se com um exemplo de duas variáveis e depois estendeu-se para mais variáveis. O problema de otimização foi formulado somente

com uma restrição de projeto que segue a baixo. Para este exemplo fez-se um estudo comparativo da análise de sensibilidade utilizando-se o Método Analítico e o Método das Diferenças Finitas.

$$\begin{aligned} \text{Min } V &= \rho \sum b h_i L_i \\ \text{Sujeito a:} \\ \text{Pr}(x_2 > 0.0002) &< 0.01 \\ 0.001 \leq h_1 &\leq 10 \end{aligned} \quad (27)$$

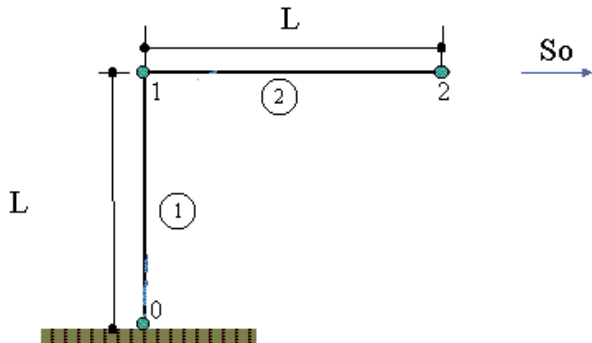


Figura 1 – Pórtico de duas barras.

A restrição de projeto considerada foi que a probabilidade do deslocamento horizontal, no ponto

2, ser maior do que 0,2 (mm) fosse menor que 1%. Um limite inferior foi estabelecido para as variáveis de projeto para não corresse o risco de que durante o processo de otimização uma das variáveis de projeto tendesse a zero e gerasse inconsistência na matriz de rigidez. Para esse exemplo utilizou-se o módulo de Elasticidade de  $E = 2 \times 10^7 \text{ KN/m}^2$  e a densidade do material igual a  $\rho = 2500 \text{ Kg/m}^3$ . As dimensões iniciais da seção transversal foram:

Largura da seção transversal:  $b = 0,10 \text{ m}$

Altura da seção transversal :  $h = 0,15 \text{ m}$ ;

Para a configuração inicial do pórtico, a restrição tem um valor inicial de 0,53%. Nas tabelas 1, 2 e 3 são apresentados os resultados para a análise de sensibilidade da autocorrelação da resposta e do desvio padrão. Os resultados da análise de sensibilidade foram obtidos pelo Método Analítico (MA) e pelo Método das Diferenças Finitas (MDF) com  $\Delta x$  variando de  $10^{-2}$  a  $10^{-7}$ .

Pode-se perceber que os valores da autocorrelação da resposta e do desvio padrão, obtidos pelo MDF apresentam bons resultado para  $\Delta x = 10^{-7}$  em se comparando com o MA.

Na Tabela 4 são apresentados alguns passos da otimização com os valores das variáveis de projeto e da função objetivo.

Tabela 1 – Sensibilidade da autocorrelação da resposta em relação a  $h_1$ .

Rx	MA	MDF(1E-2)	MDF(1E-4)	MDF(1E-7)	Erro(%)
1	1,252E-05	8,210E-08	1,263E-05	1,261E-05	-7,332E-01
2	-1,397E-06	5,269E-07	-1,205E-06	-1,358E-06	2,764E+00
3	3,033E-04	5,511E-06	3,059E-04	3,055E-04	-7,360E-01
4	2,351E-04	-4,095E-06	2,378E-04	2,369E-04	-7,482E-01
5	4,269E-05	-1,589E-06	4,334E-05	4,308E-05	-8,995E-01

Tabela 2 – Sensibilidade da autocorrelação da resposta em relação a  $h_2$ .

Rx	MA	MDF(1E-2)	MDF(1E-4)	MDF(1E-7)	Erro(%)
1	1,611E-05	-8,602E-07	1,572E-05	1,586E-05	1,556E+00
2	2,372E-06	-7,394E-07	2,251E-06	2,121E-06	1,183E+01
3	3,963E-04	-2,370E-05	3,862E-04	3,898E-04	1,685E+00
4	3,083E-04	-2,413E-05	2,993E-04	3,031E-04	1,701E+00
5	7,725E-05	7,528E-06	7,599E-05	7,591E-05	1,773E+00

Tabela 3 – Sensibilidade desvio padrão em relação as variáveis de projeto.

$d\sigma/dh_i$	MA	MDF(1E-2)	MDF(1E-4)	MDF(1E-7)	Erro(%)
1	4,544E-01	3,982E-04	4,592E-01	4,578E-01	-7,626E-01
2	6,140E-01	-3,216E-02	5,980E-01	6,036E-01	1,697E+00

Pode-se observar na Tabela 4 que houve uma redução no valor da função objetivo de 8,3%. Fazendo uma análise da restrição verifica-se que essa atingiu um valor final de 1%.

**5.2 Exemplo 2 – Pórtico de 6 barras**

O segundo exemplo é um pórtico composto de seis barras, apresentado na Figura 3 Para esse exemplo considerou-se o mesmo tipo de excitação do exemplo anterior, porém com uma valor de 2 g<sup>2</sup>/Hz, aplicado na direção horizontal no nó 3. Para este problema foram estabelecidas três restrições de projeto, que são:

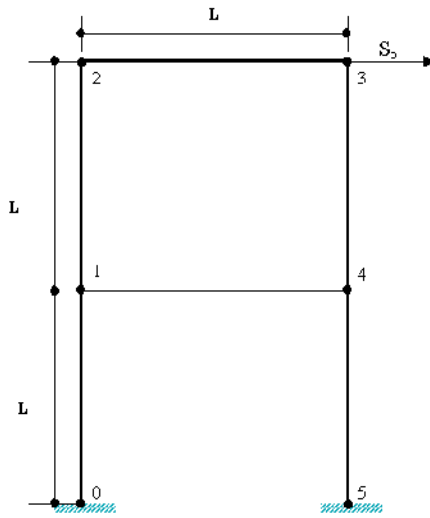


Figura 3 – Pórtico de seis barras.

- A probabilidade do deslocamento horizontal do nó 3 de ser maior que 4 mm fosse menor que 2%:

$$Pr1(x3 > 0,004) < 0,02; \tag{28}$$

- A probabilidade do deslocamento vertical do nó 3 de ser maior que 4 mm fosse menor que 2%:

$$Pr2(y3 > 0,006) < 0,02 \tag{29}$$

- A probabilidade da rotação do nó 3 de ser maior que 0,004 rads fosse menor que 2%:

$$Pr3(\theta3 > 0,004) < 0,02 \tag{30}$$

As dimensões iniciais das barras foram:  
Largura da seção transversal: b = 0,10 m;  
Altura da seção transversal : h = 0,10 m.,

Para as dimensões iniciais, as probabilidades apresentadas pelas expressão (28) a (30) são de 0,70%, 0,54% e 0,16%, respectivamente. Para esse exemplo, utilizou-se o módulo de Elasticidade de E = 2.e6 KN/m<sup>2</sup> e a densidade do material igual a ρ = 2500 Kg/m<sup>3</sup>.

Na Tabela 5 apresenta-se alguns passos do processo de otimização com os valores das variáveis de projeto e da função objetivo nesses passos.

Como pode-se observar na Tabela 5, houve uma redução no valor da função objetivo de

Tabela 4 – Passos de Otimização do Pórtico de duas barras.

Iteração	1	5	10	16	18
Var. de Proj.					
h <sub>1</sub> (m)	0,15	0,15274e	0,14392	0,14120	0,14123
h <sub>2</sub> (m)	0,15	0,14388	0,13603	0,13411	0,13385
Fun. Obj.(Kg)/ ρ	0,03	0,029662	0,027996	0,027531	0,027507

Tabela 5 – Etapas de Otimização do Pórtico de seis barras.

Iteração	1	2	3	6	9	12	15	16
Var. de Proj.								
h <sub>1</sub> (m)	0,1	0,09151	0,07397	0,06900	0,06643	0,06283	0,06432	0,06431
h <sub>2</sub> (m)	0,1	0,09136	0,07356	0,06838	0,06616	0,06499	0,06346	0,06346
h <sub>3</sub> (m)	0,1	0,0918	0,07472	0,06977	0,06694	0,06577	0,06432	0,06432
h <sub>4</sub> (m)	0,1	0,09150	0,07394	0,06884	0,06643	0,06429	0,06379	0,06379
h <sub>5</sub> (m)	0,1	0,09919	0,07357	0,06841	0,06619	0,06494	0,06346	0,06346
h <sub>6</sub> (m)	0,1	0,09149	0,07392	0,06891	0,06634	0,06599	0,06430	0,06429
Fun, Obj, (Kg) / ρ	0,06	0,05490	0,04437	0,04133	0,03985	0,03928	0,03836	0,03836

aproximadamente 36,1%. Analisando-se as restrições, para os valores finais das variáveis de projeto, o projeto ótimo apresenta a primeira restrição ativa com o valor de 2% e as duas últimas duas restrições foram para zero.

### 5.3 Exemplo 3 – Treliça de 10 barras

O terceiro exemplo é o de uma treliça composta por 10 barras. O modelo da treliça é apresentado na Figura 3. Para esse modelo, considerou-se uma excitação também do tipo ruído branco aplicada na direção y do nó 3, com valor de 2 g<sup>2</sup>/Hz e uma restrição no mesmo nó tal que a probabilidade do deslocamento vertical do nó ser maior do que 2 mm fosse menor que 2%.

$$\begin{aligned} \text{Min } V &= \rho A_i L_i \\ \text{Sujeito a:} \\ \text{Pr}(y_3 > 0.01) &< 0.02 \\ 0.001 \leq A &\leq 10 \end{aligned} \quad (31)$$

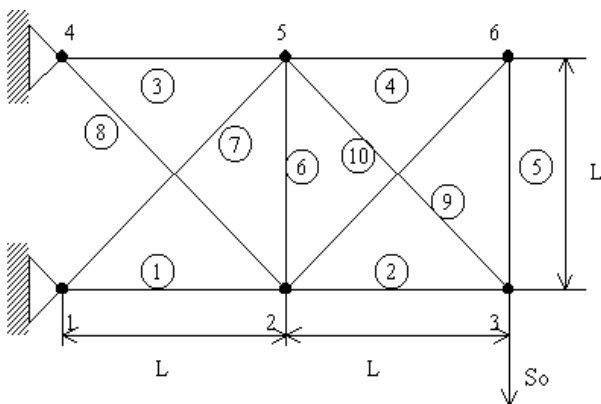


Figura 3 – Treliça de 10 Barras.

Para esse exemplo, como nos outros, estabeleceu-se um limite inferior para as variáveis de projeto para não se correr o risco de que uma delas fosse para zero e gerasse inconsistência na matriz de rigidez. Para o modelo inicial da treliça a restrição possui o valor de 0,38% com o valor das áreas das seções transversais iguais a 0,005 m<sup>2</sup>.

Na Tabela 6, são apresentados os valores das variáveis de projeto e função objetivo para cada passo de otimização.

Como pode-se observar, houve um decréscimo na função objetivo de 42% e a restrição atingiu o valor final de 2%.

## 6 Conclusões

Após a análise dos resultados obtidos para a análise de sensibilidade e otimização pode-se chegar as seguintes conclusões:

As equações obtidas analiticamente para a análise de sensibilidade são válidas. Pode-se perceber nas Tabelas 2, 3 e 4 que os resultados obtidos pelo MA e pelo MDF variando o Δx são bem próximos. Os erros são devidos a problemas de arredondamentos acumulativos e dos processos de integração numérica. Esses erros são admissíveis, pois estão na faixa de 1%. Esses resultados mostram que as equações foram derivadas corretamente.

Em relação ao problema de otimização, pode-se perceber que para todos os exemplos obteve-se um projeto melhorado em relação ao projeto inicial. Ou seja, conseguiu-se diminuir a massa estrutural dos projetos analisados. Isso vem demonstrar que o estudo é válido e pode ser aplicado em problemas reais.

Tabela 6 – Etapas de otimização da treliça de 10 Barras.

Iteração	1	2	3	4	5	7	9	10
Var. (m <sup>2</sup> )								
A1	0,005	0,00361	0,00328	0,00325	0,00324	0,003223	0,003231	0,003156
A2	0,005	0,00334	0,00310	0,00307	0,00306	0,003053	0,003052	0,003231
A3	0,005	0,00361	0,00328	0,00325	0,00324	0,003031	0,003229	0,003052
A4	0,005	0,00334	0,00310	0,00307	0,00306	0,003054	0,003054	0,003054
A5	0,005	0,00325	0,00303	0,003	0,003299	0,002986	0,02985	0,002985
A6	0,005	0,00312	0,00293	0,00289	0,002891	0,002883	0,002883	0,002983
A7	0,005	0,003	0,00275	0,00273	0,002721	0,002714	0,002714	0,002714
A8	0,005	0,003	0,00275	0,00273	0,002721	0,002714	0,002714	0,002714
A9	0,005	0,00301	0,00276	0,00273	0,002722	0,002715	0,002714	0,002714
A10	0,005	0,0030	0,00275	0,00273	0,00272	0,002713	0,002713	0,002712
F. O. (Kg/p)	0,0583	0,03725	0,0343	0,03397	0,03388	0,03379	0,033785	0,033784



## Referências

- Alves, E. C., Vaz, L. E, Kataoka Filho, M. “Análise da Sensibilidade da Resposta de Estrutura Submetida a Carregamentos Aleatório”, XXI CILAMCE – Rio de Janeiro – Brazil, 2000.
- Alves, E. C., Vaz, L. E, Kataoka Filho, M. “Análise da Sensibilidade e Otimização de Estruturas Submetidas a Vibrações Aleatórias, Tese de Doutorado, Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos – Brasil, 2002.
- Bathe, K. J, “Finite Element Procedures in Engineering Analysis”, Prentice-Hall, Einglewood Cliffs, NJ, 1982.
- Clough, R. W., Penzien, J., “Dynamics of Structures”, McGraw-Hill, New York, 1975.
- Hafta, R. T., Gürdal, Z. “Elements of Structural Optimization”, Kluwer Academic Publishers, 1992.
- Herskovits, J., “Advances in Structural Optimization”, Kluwer Academic Publishers 1995.
- Lipton, R. “Optimal Design and Relaxation for Reinforced Plates Subject to Randon Transverse Loads”, Journal of Probabilistic Engineering Mechanics, 1993.
- Lemke, C. E., “On Complementary Pivot Theory”, Mathematics of Decision Sciences, Edts. Dantizg, G. B. Yenott, A> F., p 95-114, 1968.
- Neubert, V. H., “Optimization of Location and amount of viscous damping to minimize random vibration”, Journal of Acoustical Society of America, May, p. 2707-2715 1993.
- Kim, S. H., Wen, Y. K., “Optimization of Structures under stochastic Loads”, Structural Safety, Vol. 7, p. 177-190, 1990.
- Wang, B. P., “Improved Aproximated Methods for Computing Eigenvector D-erivatives in Structural Dynamics”, AIAA Journal, 29 (6), p. 1018-1020, 1991.
- Wilkinson, J. H., Reinsch, C., “Linear Algebra”, Springer-Verlag Berlin Heidelber New York, 1971.