

# Otimização de Estruturas de Placas: uma Comparação entre a Análise Determinística e Probabilística

Elcio Cassimiro Alves\*

## Resumo

Este trabalho apresenta a formulação e a otimização de estruturas de placas submetidas a vibrações aleatórias, comparando a otimização estrutural no domínio do tempo e no domínio da frequência, utilizando-se como algoritmo o Método dos Pontos Interiores, apresentando exemplos comparativos dos dois processos de otimização.

**Palavras-chave:** Placas, Otimização, Determinística, Probabilística.

## 1 Introdução

O problema de otimização estrutural vindo sendo estudado exaustivamente nas últimas décadas, principalmente envolvendo carregamento estático, tanto para otimização de dimensões quanto para a otimização de forma. Alguns trabalhos relevantes podem ser destacados como Herskovits (1995), Lund (1999), Falco (2000), Alves (2002).

A otimização estrutural envolvendo carregamento dinâmico ainda é pouco estudada, e para o caso de carregamento com características de um carregamento randômico, é ainda menos pesquisada.

Este trabalho apresenta a formulação e exemplos de aplicação de otimização estrutural envolvendo carregamento randômico para o problema de estruturas de placas. Uma análise comparativa também é realizada para otimização determinística e a sua otimização equivalente.

## 2 A Formulação Geral do Problema de Otimização com Carregamento Randômico

Segundo Alves (2002), o problema de otimização de estruturas submetidas a vibrações aleatórias pode ser formulado da seguinte maneira:

*Deseja-se minimizar a massa de uma estrutura submetida a vibração aleatória, de modo que, em um determinado ponto da estrutura, a probabilidade do deslocamento ou aceleração ser maior que um deslocamento ou aceleração definida seja menor do que uma probabilidade preestabelecida.*

Dessa forma pode-se determinar uma faixa na qual a estrutura esteja trabalhando com certa segurança para o carregamento em questão. Analiticamente o problema pode ser formulado da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \text{Min } P &= \rho \Sigma V_i \\ \text{Sujeito a: } \Pr(x_i > x_{\max}) &< P_{\max} \\ \Pr(\ddot{x}_i > \ddot{x}_{\max}) &< P_{\max} \\ v_l &\leq v_i \leq v_u \end{aligned} \quad (01)$$

onde

$\rho$  – massa específica do material;

$v_i$  – variável de projeto, que pode ser a área da seção transversal, as dimensões (b, h) ou a espessura da camada de uma placa laminada;

$x_i$  – deslocamento de um determinado ponto da estrutura;

$x_{\max}$  – deslocamento máximo admissível no ponto  $x_i$ ;

$\ddot{x}_i$  – aceleração gerada num determinado ponto da estrutura;

$\ddot{x}_{\max}$  – aceleração máxima preestabelecida no estudo;

$P_{\max}$  – probabilidade máxima estabelecida pelo usuário, tipo (10%, 15%);

$v_l, v_u$  – limites inferiores e superiores das variáveis de projeto, respectivamente.

Nessa formulação tem-se que a  $\Pr(x_i > x_{\max})$  é dada pela seguinte expressão:

$$\Pr(x_i > x_{\max}) = \int_{x_{\max}}^{\infty} p(x_i) dx \quad (02)$$

onde  $p(x_i)$  é função de densidade de probabilidade dada por

\* Dr. Sc., Prof. Adjunto, Centro Tecnológico/Eng. Civil /UFES, Vitória – ES, Brasil – ecalves1@yahoo.com.br

$$p(x_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{x_i}} e^{-\left[\frac{(x_i - \bar{x}_i)^2}{2\sigma_{x_i}^2}\right]} \quad (03)$$

Para o problema estudado os processos são ergódicos com média nula. Dessa forma a expressão (3) se reduz a:

$$p(x_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{x_i}} e^{-\left[\frac{(x_i)^2}{2\sigma_{x_i}^2}\right]} \quad (4)$$

Expressões semelhantes podem ser deduzidas para as acelerações, somente substituindo  $x_i$  por  $\ddot{x}_i$ .

O desvio padrão da resposta da estrutura submetida à vibração aleatória é dada por (Clough, 1975):

$$\sigma_x^2 = R_x(0) = \frac{1}{2\pi} \phi \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} S_f(\bar{\omega}) |H(\bar{\omega})|^2 d\bar{\omega} \right] \phi^T \quad (5)$$

e a expressão para o desvio padrão da aceleração em um determinado ponto pode ser escrita como

$$\sigma_{\ddot{x}^*}^2 = R_{\ddot{x}^*}(0) = \frac{1}{2\pi} \phi \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{\omega}^{-4} S_x(\bar{\omega}) |H(\bar{\omega})|^2 d\bar{\omega} \right] \phi^T \quad (6)$$

Para o algoritmo de otimização as restrições laterais do problema de otimização são transformadas em restrição de desigualdade. Dessa forma tem-se que:

$$v_l \leq v \rightarrow v_l - v \leq 0 \quad (7)$$

$$v \leq v_u \rightarrow v - v_u \leq 0 \quad (8)$$

### 2.1 O algoritmo de otimização utilizado

Para resolver o problema proposto foram utilizados o algoritmo baseado no Método dos Pontos Interiores (Herskovits 1995) e o algoritmo de Programação Quadrática Sequencial, baseado no método de Lemke (1968). Esses algoritmos pertencem à classe dos métodos gradientes. Para a utilização desses métodos é necessária a determinação dos gradientes da função objetivo e restrições, para a determinação da direção de busca. A análise de sensibilidade foi baseada no trabalho de Alves (2000), onde é realizado um estudo comparativo entre o Método Semi Analítico e o Método das Diferenças Finitas. Dessa forma tem-se um estudo da análise de sensibilidade da resposta da estrutura, quando submetida à vibrações aleatórias, utilizada para a determinação dos gradientes das restrições.

### 2.2 O Problema de otimização com carregamento Dinâmico Determinístico

Segundo Falco (2000) o problema de otimização com carregamento dinâmico determinístico pode ser escrito da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \text{Minimize } V &= \sum_{i=1}^{\text{num elems}} x_i \\ \text{Sujeito a: } u(t) &\leq u_{\text{max}} \\ x_{lw} &\leq x_i \leq x_{up} \end{aligned} \quad (9)$$

onde

$x_i$  – volume do elemento  $i$  da malha de elementos finitos, que pode ser dado em função da área da seção transversal, dimensões da seção transversal, ou da espessura de um elemento;

$u(t)$  – deslocamento em um determinado passo de tempo  $t$ .

$x_{lw}, x_{up}$  – limites inferior e superior das variáveis de projeto, respectivamente.

O deslocamento  $u(t)$  é calculado pelo Método de Newmark que é descrito resumidamente a seguir.

Para o Método de Newmark tem-se que:

$${}^{t+\Delta t} \dot{\mathbf{u}} = {}^t \dot{\mathbf{u}} + (1 - \delta) {}^t \ddot{\mathbf{u}} \Delta t + \delta {}^{t+\Delta t} \ddot{\mathbf{u}} \quad (10)$$

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{u} = {}^t \mathbf{u} + {}^t \dot{\mathbf{u}} \Delta t + \left(\frac{1}{2} - \alpha\right) {}^t \ddot{\mathbf{u}} \Delta t^2 + \alpha {}^{t+\Delta t} \ddot{\mathbf{u}} \Delta t^2 \quad (11)$$

$$\mathbf{M} {}^{t+\Delta t} \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C} {}^{t+\Delta t} \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K} {}^{t+\Delta t} \mathbf{u} = {}^{t+\Delta t} \mathbf{R} \quad (12)$$

onde  ${}^t \mathbf{u}$ ,  ${}^t \dot{\mathbf{u}}$ ,  ${}^t \ddot{\mathbf{u}}$  são, respectivamente, deslocamento, velocidade e aceleração no tempo  $t$  e  ${}^{t+\Delta t} \mathbf{u}$ ,  ${}^{t+\Delta t} \dot{\mathbf{u}}$  e  ${}^{t+\Delta t} \ddot{\mathbf{u}}$  representam o deslocamento, velocidade e aceleração no tempo  $t+\Delta t$ , respectivamente.

## 3 Otimização de Placas Com Carregamento Dinâmico

Para o caso de placas realizou-se a análise para uma placa quadrada engastada nas quatro bordas, conforme mostrado nas Figuras 1 e 2. O carregamento da placa segue na Figura 3.

Devido à simetria da estrutura analisou-se somente ¼ da placa. Para o problema de otimização analisou-se a placa considerando-se 1, 2 e 4 variáveis de projeto.

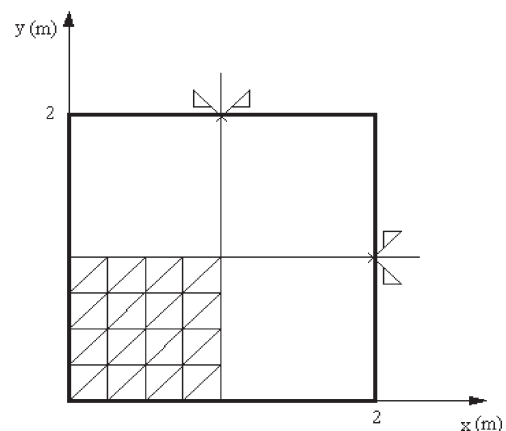
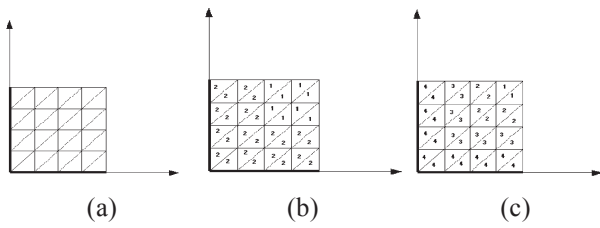
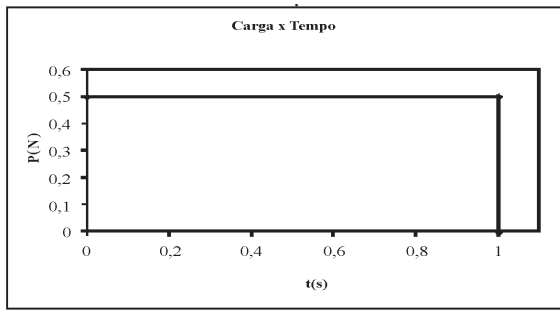


Figura 1 – Placa analisada para otimização.



**Figura 2** – a – Otimização para 1 variável de Projeto  
 b – Otimização para 2 variáveis de Projeto  
 c – Otimização para 4 variáveis de Projeto.



**Figura 3** – Gráfico Carga x Tempo.

O problema de otimização da placa foi definido da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \text{Minimize: } V &= \sum \rho A_i h_i \\ \text{Sujeito a: } wc(t) &\leq 0.029 \\ hlw &\leq hi \leq hup \end{aligned} \quad (13)$$

### 3.1 Otimização equivalente de placas

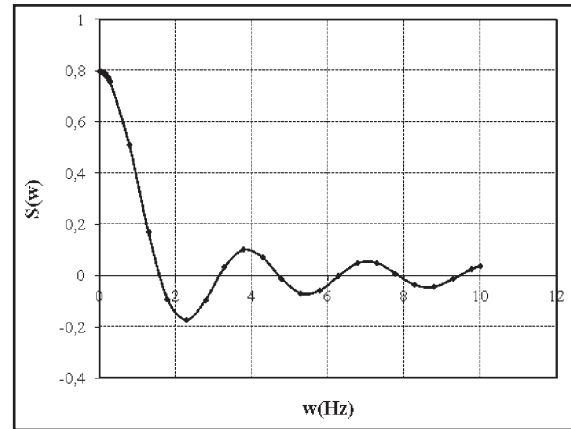
Para o problema de placas descrito na expressão (13) realizou-se um estudo da otimização probabilística equivalente da placa. Da mesma forma que no caso determinístico, o problema probabilístico foi analisado para 1, 2 e 4 variáveis de projeto.

Alves (2000) descreve detalhadamente com a utilização de transformada de Fourier como A Tabela 1 –

apresenta os resultados obtidos para o problema de otimização descrito na expressão (13) para 1, 2 e 4 variáveis de projeto.

obter o carregamento equivalente para otimização determinística, e Alves (2001) apresenta aplicação do problema para estruturas reticuladas.

Para o carregamento dinâmico proposto no problema da expressão (3) o carregamento probabilístico equivalente segue na Figura 4. Deseja-se nesse problema que a probabilidade do deslocamento no centro da placa de ser maior que 0,029 m não seja maior que 0,5%.



**Figura 4** – Carregamento equivalente para otimização probabilística da placa.

$$\begin{aligned} \text{Minimize } V &= \sum_{i=1}^{num\ elements} \rho A_i h_i \\ \text{Sujeito a: } Pr(wc > 0.029) &\leq 0,5\% \\ 0,01(m) &\leq hi \leq 0,1(m) \end{aligned} \quad (14)$$

Os resultados da otimização seguem na Tabela 2.

Como pode-se observar na Tabela 2, da mesma forma que no caso da otimização determinística, o melhor resultado foi obtido considerando-se a otimização com quatro variáveis de projeto. Da mesma forma que no caso de estruturas reticuladas, as variáveis de projeto têm valores diferentes, porém, a função objetivo tem valores

**Tabela 1. Resultados da otimização determinística para placa**

Variáveis de Projeto	Inicial	Final		
		1 V.P.	2 V.P.	4 V.P.
h1(m)	1x10 <sup>-2</sup>	9.615x10 <sup>-2</sup>	1.605x10 <sup>-2</sup>	2.104x10 <sup>-2</sup>
h2(m)	1x10 <sup>-2</sup>	—	3.657x10 <sup>-2</sup>	1.004x10 <sup>-2</sup>
h3(m)	1x10 <sup>-2</sup>	—	—	5.243x10 <sup>-3</sup>
h4(m)	1x10 <sup>-2</sup>	—	—	3.007x10 <sup>-3</sup>
Função Objetivo (m <sup>3</sup> )	25.0	24.04	16.89	15.38
Restrição (m)	2.58x10 <sup>-2</sup>	2.9x10 <sup>-3</sup>	2.9x10 <sup>-3</sup>	2.9 x10 <sup>-3</sup>

Como se pode observar para os casos estudados no problema da placa, o melhor resultado foi obtido considerando-se o problema com 4 variáveis de projeto. Para todos os três casos a restrição se faz ativa no final da otimização.

**Tabela 2.** – Resultados da otimização probabilística para placa

Variáveis de Projeto	Inicial	Final		
		1 V.P.	2 V.P.	4 V.P.
h1(m)	1x10 <sup>-2</sup>	7.036x10 <sup>-3</sup>	1.026x10 <sup>-2</sup>	1.155x10 <sup>-2</sup>
h2(m)	1x10 <sup>-2</sup>	–	4.806x10 <sup>-3</sup>	7.466x10 <sup>-3</sup>
h3(m)	1x10 <sup>-2</sup>	–	–	2.970x10 <sup>-3</sup>
h4(m)	1x10 <sup>-2</sup>	–	–	5.776x10 <sup>-3</sup>
Função Objetivo (m3)	25.0	17.590	15.424	13.942
Restrição (%)	38	44.7	44.7	44.7

relativamente próximos, a menos do caso considerando-se somente uma variável de projeto; ao se calcular a relação da função objetivo do caso probabilístico, dividido pela função objetivo do caso determinístico, os valores serão, 0,732%, 0,913% e 0,906% para 1, 2 e 4 variáveis de projeto, respectivamente. Como se pode observar os resultados melhoraram sensivelmente com o aumento do número de variáveis de projeto.

## 4 Conclusões

Conforme apresentados nas Tabelas 1, 2 obtêm-se resultados melhorados do projeto inicial proposto para o problema de placa, tanto para o carregamento dinâmico determinístico quanto para o carregamento dinâmico randômico.

Em relação aos resultados a otimização equivalente de um carregamento dinâmico determinístico em relação ao carregamento dinâmico randômico mostraram resultados bem próximos, apesar de algumas diferenças nas variáveis de projeto o resultado final da função objetivo foram bem próximos para o caso com quatro variáveis. O aumento das variáveis de projeto melhoraria este processo.

Em relação ao custo computacional a otimização para o caso randômico é mais cara, principalmente quando se tem que avaliar os gradientes das restrições, que envolvem a avaliação dos gradientes das matrizes de rigidez, massa, amortecimento, frequências de vibração e modos de vibração, além da avaliação da sensibilidade do desvio padrão e das funções de autocorrelação aplicadas na Transformada de Fourier.

## 5 Referências

- Alves, E. C.; Vaz, L. E.; Kataoka Filho, M. Análise da Sensibilidade da Resposta de Estruturas submetida a Carregamento Aleatório. [CD-ROOM]. In: Congresso Ibero Latino Americano de Métodos Computacionais Aplicados em Engenharia, 20º, Rio de Janeiro, 2000. Anais. Rio de Janeiro: Tec-Graf, 2000.
- Alves, E. C.; Vaz, L. E.; Kataoka Filho, M.; Venancio

Filho, F. Optimum Design of Plates Subjected to Random Loadings. [CD ROOM] In: ASMO UK/ ISSMO Conference on Engineering Design Optimization, North Yorkshire, 2001. Proceedings. Editora, North Yorkshire: 2001.

Alves, E. C.; Vaz, L. E.; Kataoka Filho, M.; Venancio Filho, F. Uma Comparação entre Otimização Determinística e Probabilística para Estruturas Reticuladas [CD-ROOM]. In: Congresso Ibero Latino Americano de Métodos Computacionais Aplicados em Engenharia, 21, Campinas, 2001. Anais. Campinas: Tec-Graf, 2001.

Clough, R. W. The finite element method in plane stress analysis, ASCE Conference on electronic computer, 20., Pittsburg, 1960. Proceeding. Pittsburg, 1960.

Clough, R. W., Penzien, J. Dynamics of structures. New York: McGraw-Hill, 1970.

Falco, S. A. Otimização de forma de cascas submetidas a carregamento dinâmico. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro – PUC-Rio, 2000.

Herskovits, J. A two-stage feasible direction algorithm for nonlinear constrained optimization. INRIA, (Research Report No. 103), 1982.

Herskovits, J. A two-stage feasible direction algorithm for nonlinear constrained optimization. INRIA, (Research Report No. 118), 1982.

Herskovits, J. Advances in structural optimization. Rio de Janeiro: Kluwer Academic Publishers, 1995.

Lund, E; Olhoff, N., Shape design sensitivity analysis of eigenvalues using exact numerical differentiation of finite element matrices. Structural Optimization, v. 8, p. 52-59, 1994.

Kabir, H. R. H. A shear locking free isoparametric 3 node triangular finite element for moderately-thick and thin Plates. International Journal of Numerical Engineering, v. 35, p. 503-519, 1992.

Kim, S. H.; Wen, Y. K. Optimization of structures under stochastic loads. Structural Safety, v. 7, p. 177-190, 1990.