

# Teoria da Resistência Unificada Aplicada ao Concreto

*Iporan de Figueiredo Guerrante<sup>1</sup>*

*Emil de Souza Sánchez Filho<sup>2</sup>*

*Luis Antônio Vieira Carneiro<sup>3</sup>*

## Resumo

Este artigo apresenta os resultados de um estudo teórico e experimental sobre o estado de tensões em junções de concretos de diferentes resistências e idades, unidos por resina epóxi.

São determinados diversos parâmetros para utilização das envoltórias de ruptura para o estado plano de tensões, de modo a se analisar a Teoria da Resistência Unificada.

A tensão de aderência foi determinada por meio de ensaios de compressão em copos de prova cilíndricos, confeccionados com concretos de diferentes idades e resistências, colados com resina epóxi em inclinações de 30°, 45° e 60°. As envoltórias de ruptura são representadas graficamente, tecendo-se comentários sobre a validade dessa teoria.

**Palavras-chave:** Teoria da Resistência Unificada; Teoria da Plasticidade; Concreto Estrutural.

## 1 Introdução

Um elemento estrutural tende a se deformar quando submetido a ações que podem ser oriundas de carregamentos, ou em função de variações de temperatura. Essas deformações são consideradas elásticas se reversíveis quando cessam as ações que as provocam, ou plásticas, quando essas variações se tornam definitivas e irreversíveis.

A maioria dos materiais utilizados em engenharia apresenta, até certo ponto, propriedades elásticas, isto é, a relação entre as tensões e deformações específicas é linear. Em estruturas usuais de engenharia os materiais utilizados encontram-se, quase em sua totalidade, submetidos a estados biaxiais ou triaxiais de tensão.

YU (2009) relata que a aplicação inadvertida e equivocada de conceitos de estados uniaxiais de tensão para estados multiaxiais pode acarretar graves problemas para a estrutura concebida dessa forma. A combinação de tensões no estado biaxial ou triaxial, com valores inferiores ao do uniaxial, pode ultrapassar a capacidade resistente da estrutura.

## 2 Teoria da Resistência Unificada

O comportamento geral de funções de escoamento de materiais submetidos a estados de tensão

complexos, segundo a Teoria da Resistência Unificada YU (2004), segue, para materiais isotrópicos, a formulação genérica é dada por:

$$F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0 \text{ ou } F(I_1, J_2, J_3) = 0 \quad (2.1)$$

Os parâmetros que devem ser considerados num critério de plastificação são: efeito de resistências diferentes, tração e compressão, efeito da pressão hidrostática, efeito da tensão normal, da tensão principal intermediária, tensão cisalhante máxima intermediária e da simetria da superfície de plastificação no plano desviador.

A função de plastificação também pode ser expressa em função das tensões cisalhantes máximas:

$$f(\tau_{13}, \tau_{12}, \tau_{23}) = 0 \text{ ou} \quad (2.2)$$

$$f(\tau_{13}, \tau_{12}, \tau_{23}, \sigma_{13}, \sigma_{12}, \sigma_{23}) = 0$$

A existência de apenas duas tensões de cisalhamento máximas independentes, permite converter em um estado de tensões cisalhantes gêmeas  $(\tau_{13}, \tau_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{12})$  ou  $(\tau_{13}, \tau_{23}, \sigma_{13}, \sigma_{23})$ . Esse modelo consiste de dois grupos de quatro planos mutuamente perpendiculares, com a atuação da tensão cisalhante máxima  $\tau_{13}$  e da tensão máxima intermediária  $\tau_{12}$  ou  $\tau_{23}$ .

1 M. Sc., doutorando do PPGEC UFF. iporan@terra.com.br.

2 D. Sc., emilsanchez@uol.com.br.

3 D. Sc., carneiro@ime.eb.br.

O elemento cisalhante múltiplo apresenta três tensões cisalhantes máximas  $\tau_{13}$ ,  $\tau_{12}$  e  $\tau_{23}$  no referencial de tensões principais  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  e  $\sigma_3$ . De qualquer modo, mesmo usando esse elemento, apenas duas tensões são independentes, pois a tensão cisalhante máxima é a soma das outras duas:

$$\tau_{13} = \tau_{12} + \tau_{23} \quad (2.3)$$

Os efeitos da tensão cisalhante máxima intermediária ( $\tau_{12}$  e  $\tau_{23}$ ) são computados tanto no elemento de tensões cisalhantes gêmeas quanto no elemento múltiplo.

YU *et al.* (2009), por existirem sempre duas tensões cisalhantes máximas independentes, denominaram essa teoria de tensões cisalhantes gêmeas. A atuação das tensões se dá em oito planos em dois grupos de tensão de cisalhamento, que formam elementos octaédricos regulares. É possível remover metade do octaedro regular, obtendo-se um elemento pentaédrico. Esses autores confirmam que as relações entre tensões cisalhantes e tensões normais principais podem ser deduzidas por meio desse elemento. Assim sendo, a Teoria da Resistência Unificada (TRU) pode ser desenvolvida tanto pelo elemento octaédrico como pelo pentaédrico.

A TRU considera todas as componentes de tensão que atuam no elemento, bem como todos os vários efeitos decorrentes de tensões na ruptura dos materiais. Assume que a plastificação dos materiais tem o seu início quando a soma das duas maiores tensões cisalhantes máximas e suas correspondentes normais alcançam um determinado valor  $c$ , seguindo-se:

$$F = \tau_{13} + b\tau_{12} + \beta(\sigma_{13} + b\sigma_{12}) = c \quad (2.4)$$

$$\text{quando } \tau_{12} + \beta\sigma_{12} \geq \tau_{23} + \beta\sigma_{23}$$

Estado de tensão na tração estendido.

$$F = \tau_{13} + b\tau_{23} + \beta(\sigma_{13} + b\sigma_{23}) = c \quad (2.5)$$

$$\text{quando } \tau_{12} + \beta\sigma_{12} \geq \tau_{23} + \beta\sigma_{23}$$

Estado de tensão na compressão estendido.

onde

$b$  – parâmetro que representa a influência da tensão cisalhante máxima intermediária  $\tau_{12}$  e  $\tau_{23}$  na ruptura do material;

$\beta$  – coeficiente que representa o efeito da tensão normal na ruptura;

$c$  – parâmetro de resistência do material;

$\tau_{13}$ ,  $\tau_{12}$ ,  $\tau_{23}$  – tensões cisalhantes máximas;

$\sigma_{13}$ ,  $\sigma_{12}$ , e  $\sigma_{23}$  – tensões normais correspondentes às tensões cisalhantes nas seções onde atuam.

Essas tensões são definidas por:

$$\tau_{13} = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) \quad (2.6)$$

$$\tau_{13} = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) \quad (2.7)$$

$$\tau_{13} = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) \quad (2.8)$$

$$\tau_{13} = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) \quad (2.9)$$

$$\tau_{13} = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) \quad (2.10)$$

$$\tau_{13} = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) \quad (2.11)$$

As condições experimentais para determinação dos parâmetros  $\beta$  e  $c$ , são, respectivamente, a resistência à tração uniaxial e a resistência à compressão uniaxial:

$$\sigma_1 = \sigma_t, \quad \sigma_2 = \sigma_3 = 0 \quad (2.12)$$

$$\sigma_1 = \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = -\sigma_c \quad (2.13)$$

As constantes dos materiais  $\beta$  e  $c$  são determinadas por:

$$\beta = \frac{\sigma_c - \sigma_t}{\sigma_c + \sigma_t} = \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \quad (2.14)$$

$$c = \frac{2\sigma_c\sigma_t}{\sigma_c + \sigma_t} = \frac{2}{1 + \alpha} \sigma_t \quad (2.15)$$

Com a substituição desses valores se tem as expressões da Teoria da Resistência Unificada (TRU) em termos de tensões principais:

$$F = \sigma_1 \frac{\alpha}{1+b} (b\sigma_2 + \sigma_3) = \frac{2}{1+\alpha} \sigma_t \quad (2.16)$$

quando  $\sigma_2 \geq \frac{\sigma_1 + \alpha\sigma_3}{1+\alpha}$

Estado de tensão na tração estendido.

$$F' = \frac{2}{1+b} (\sigma_1 + b\sigma_2) - \alpha\sigma_3 = \sigma_t \quad (2.17)$$

quando  $\sigma_2 \geq \frac{\sigma_1 + \alpha\sigma_3}{1+\alpha}$

Estado de tensão na compressão estendido.

Para o estado de tensão de cisalhamento é necessário considerar três tensões de tração:

$$F'' = \sigma_1 = \sigma_t, \quad (2.18)$$

quando  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3 > 0$

As relações entre resistência ao cisalhamento  $\tau_o$ , resistência à tração uniaxial  $\sigma_t$  e a resistência à compressão uniaxial  $\sigma_c$ , são determinadas pelas expressões:

$$b = \frac{(1+\alpha)\tau_o - \sigma_t}{\sigma_t + \tau_o} = \frac{1+\alpha-B}{B-1} \quad (2.19)$$

$$\sigma = \frac{\sigma_t}{\sigma_c} \quad (2.20)$$

$$B = \frac{\sigma_t}{\tau_o} = \frac{1+b+\alpha}{1+b} \quad (2.21)$$

Essa teoria introduz a razão entre a resistência ao cisalhamento e a resistência à tração de material como:

$$\alpha_t = \frac{\tau_o}{\sigma_t} = \frac{1+b}{1+b+\alpha} \quad (2.22)$$

Essa razão assume valores próximos a zero para materiais considerados frágeis ( $\sigma_t < 1$ ), e próximos a 1

( $\alpha_t > 1$ ) para materiais com maior ductilidade; valores corroborados por ensaios experimentais.

A superfície limite pode não ser convexa quando a taxa entre resistência ao cisalhamento e a tração for:

$$\alpha_t < \frac{2}{2+\alpha} \quad \text{ou} \quad \alpha_t < \frac{2}{2+\alpha} \quad (2.23)$$

Para materiais com resistências iguais na tração e compressão verifica-se que a resistência ao cisalhamento é inferior a sua resistência à tração.

### Casos Especiais da TRU

O parâmetro  $b$  é considerado como sendo o mais importante da TRU, pois reflete a influência da tensão cisalhante principal intermediária na ruptura ou plastificação de um material, e também considera o efeito da tensão normal principal intermediária  $\sigma_2$  na ruptura do material. É o parâmetro que determina o critério de ruptura. Variando-se esse parâmetro ( $0 \leq b \leq 1$ ) é possível se obter uma série de envoltórias de rupturas convexas, que têm um significado físico claro (Figura 2.1).

A Figura 2.2 mostra várias representações das envoltórias em função da variação do parâmetro  $b$ .

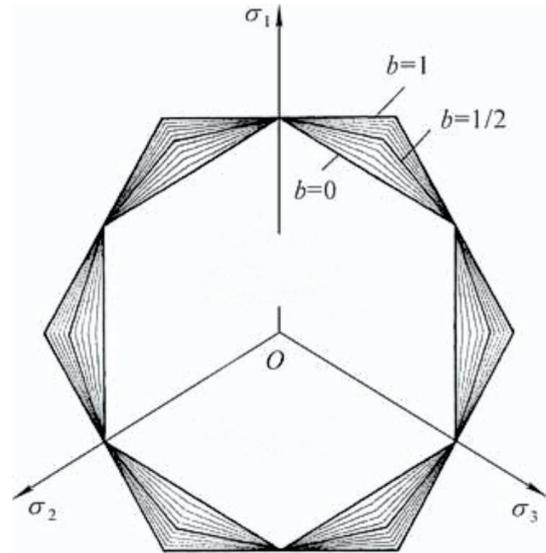


Figura 2.1 – Seções de ruptura no plano desviador com variações do parâmetro  $b$ ; YU (2004).

### TRU no Estado Plano de Tensão

Quando uma das tensões principais é nula, isto é, na ausência de uma das três tensões principais, o espaço principal onde atuam as tensões se transforma no estado plano de tensão. Nesse caso, em virtude da simetria da envoltória ( $\sigma_1 = \sigma_2$ ), apresenta três regiões distintas.

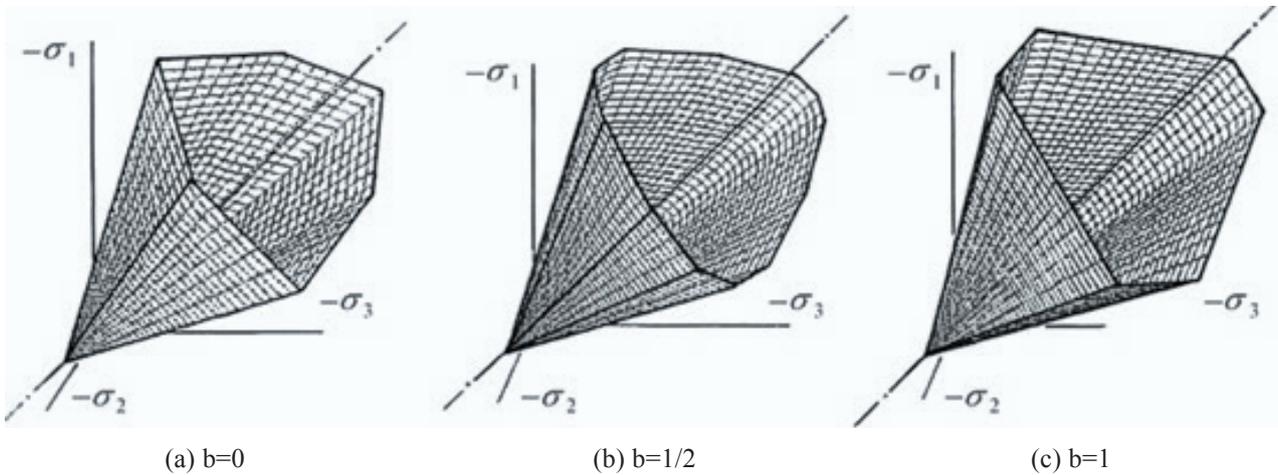


Figura 2.2 – Envoltórias de rupturas no espaço principal para os casos especiais  $b = 0$ ,  $b = 1/2$  e  $b = 1$ ; YU et al. (2004).

A primeira região, caracterizada quando se tem  $\sigma_1 > \sigma_2 > 0$ , sendo  $\sigma_3 = 0$ , é expressa como:

$$\sigma_1 = \frac{\alpha \cdot b}{1+b} \sigma_2 = \sigma_t \quad (2.24)$$

$$\text{quando } \sigma_2 \geq \frac{\sigma_1}{1+\alpha}$$

$$\frac{1}{1+b} \sigma_1 + \frac{b}{1+b} \sigma_2 = \sigma_t \quad (2.25)$$

$$\text{quando } \sigma_2 \geq \frac{\sigma_1}{1+\alpha}$$

A segunda região fica determinada quando  $\sigma_1 \geq 0$ ,  $\sigma_2 = 0$ ,  $\sigma_3 < 0$ , sendo expressa por:

$$-\frac{\alpha}{1+b} (b \cdot \sigma_2 + \sigma_3) = \sigma_t \quad (2.26)$$

$$\text{quando } \sigma_2 > \frac{\alpha + \sigma_3}{1+\alpha}$$

$$\frac{b}{1+b} \sigma_2 - \alpha \cdot \sigma_3 = \sigma_t \quad (2.27)$$

$$\text{quando } \sigma_2 > \frac{\alpha + \sigma_3}{1+\alpha}$$

Os 12 lados da envoltória apresentada na Figura 2.3 são expressos por:

$$\sigma_2 - \frac{\alpha \cdot b}{1+b} \sigma_1 = \sigma_t, \quad (2.28)$$

$$\sigma_2 - \frac{\alpha \cdot b}{1+b} \sigma_1 = \sigma_t,$$

$$\frac{\alpha}{1+b} (\sigma_2 + b\sigma_1) = \sigma_t, \quad (2.29)$$

$$\frac{\alpha}{1+b} (\sigma_2 + b\sigma_1) = \sigma_t,$$

$$\sigma_2 - \frac{\alpha}{1+b} \sigma_1 = \sigma_t, \quad (2.30)$$

$$\sigma_2 - \frac{\alpha}{1+b} \sigma_1 = \sigma_t,$$

$$\frac{b}{1+b} \sigma_2 - \alpha \sigma_1 = \sigma_t, \quad (2.31)$$

$$\frac{b}{1+b} \sigma_2 - \alpha \sigma_1 = \sigma_t,$$

$$\frac{\alpha}{1+b} (b \cdot \sigma_2 + \sigma_1) = -\sigma_t, \quad (2.32)$$

$$\frac{\alpha}{1+b} (b \cdot \sigma_2 + \sigma_1) = -\sigma_t$$

$$\frac{b}{1+b} \sigma_2 - \alpha \sigma_1 = \sigma_t, \quad (2.33)$$

$$\frac{b}{1+b} \sigma_2 - \alpha \sigma_1 = \sigma_t$$

A TRU fornece uma série de envoltórias de ruptura.

### 3 Programa Experimental

#### 3.1 Notas Iniciais

O programa experimental desenvolvido visa estudar o comportamento de corpos de prova de concreto pré-moldados unidos com resina epóxi, e permitir a elaboração das envoltórias da TRU.

As principais características estudadas foram:

- a) variação da capacidade resistente da fixação

dos elementos em função da inclinação da junta de colagem;

- b) determinação das envoltórias das resistências dos componentes.

### 3.2 Caracterização dos Materiais

O esquema do programa experimental é representado na Figura 3.1. A sequência da experimentação para determinação dos parâmetros da TRU é representada na Figura 3.2.

O concreto utilizado foi confeccionado em betoneiras, e dosado para alcançar as resistências mínimas à compressão de 20 MPa, 30 MPa, 50 MPa e 70 MPa aos 28 dias. O cimento utilizado foi o CPV-ARI com abatimento de tronco de cone igual a 120 mm. A Tabela 3.1 apresenta os consumos dos materiais empregados na execução de 1 m<sup>3</sup> de concreto.

A resistência à compressão do concreto foi obtida por meio de ensaios de compressão em corpos de prova cilíndricos, moldados em conformidade com a NBR 5738:2003, com dimensões 100 mm x 200 mm, todos ensaiados na mesma data, cujos resultados são apresentados na Tabela 3.2. Os ensaios foram realizados em prensa da marca *Contenco* com capacidade de carga de 2.400 kN, no Laboratório de Materiais de Construção e Concreto Prof. Adhemar da Cunha Fonseca do IME – Instituto Militar de Engenharia. Os valores obtidos para resistência média à compressão dos corpos de prova de referência são apresentados na

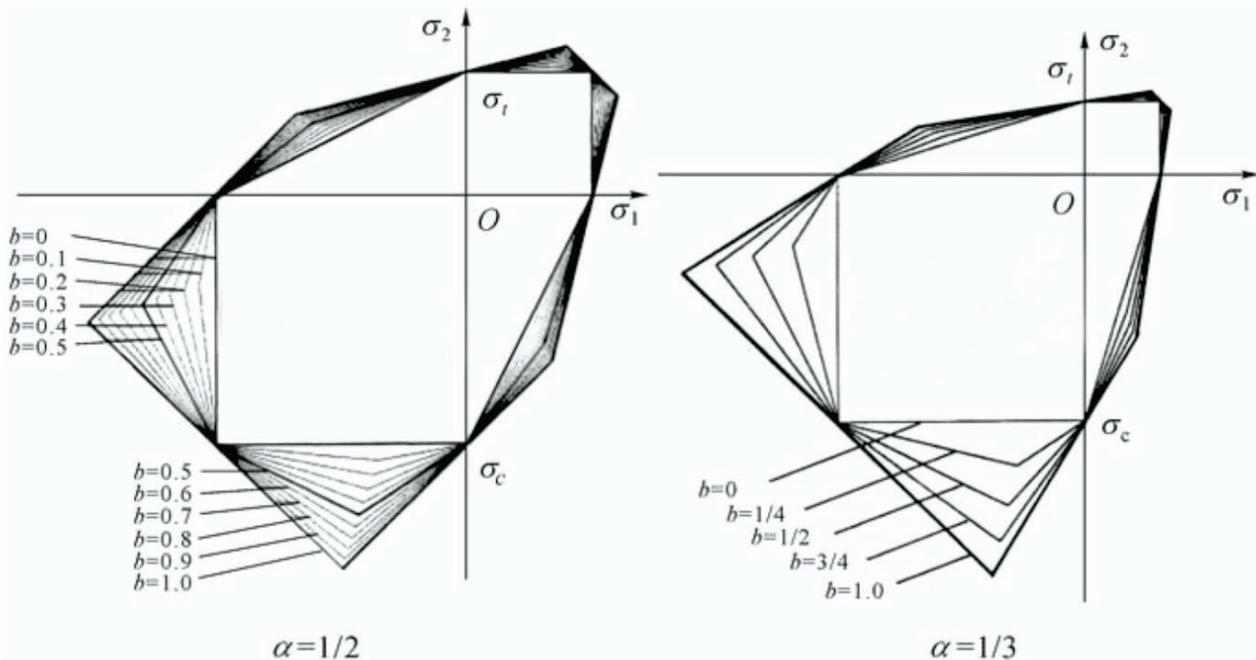


Figura 2.3 – Variações da envoltória da TRU no estado plano de tensão materiais com resistências diferentes na tração e compressão; YU (2009).

Tabela 3.2. A nomenclatura adotada foi  $Cf_c$ -RN, onde  $f_c$  é a resistência média à compressão de cálculo, R é a identificação de referência e N é o número de ordem (de 1 a 4).

Os módulos de elasticidade do conjunto de referência foram obtidos com a utilização de quatro corpos de prova de concreto cilíndricos, de conformidade com a NBR 5738:2003, com dimensões de 100 mm x

**Tabela 3.1** – Consumo de material por m<sup>3</sup> de concreto.

Material	20 MPa	30 MPa	50 MPa	70 MPa
Cimento CPV-ARI kg/m <sup>3</sup>	215	291	388	452
Microsilica – kg/m <sup>3</sup>	11	15	19	23
Água total – litros	187	190	176	161
Areia – kg/m <sup>3</sup>	795	766	728	712
Pedra britada – kg/m <sup>3</sup>	1002	1028	1061	1072
Superplastificante – litros	–	–	1,3	6,6

**Tabela 3.2** – Resistência à compressão do concreto.

Corpos de prova	$f_c$ (MPa)	$f_{c, \text{médio}}$ (MPa)
C20-R1	22,63	21,64
C20-R2	20,65	
C50-R1	70,02	72,81
C50-R2	79,41	
C50-R3	70,84	
C50-R4	70,97	
C70-R1	86,57	86,56
C70-R2	84,21	
C70-R3	92,50	
C70-R4	82,95	

**Tabela 3.3** – Módulo de elasticidade do concreto.

CP	Força de ruptura (kN)	Tensão de ruptura (MPa)	Def. esp. de ruptura ( $\frac{\%}{\text{oo}}$ )	Módulo de elasticidade secante (GPa)
C20-M1	177,77	22,63	0,81	22,15
C50-M1	588,70	74,96	2,64	37,79
C50-M2	458,80	58,42	1,71	31,43
C50-M3	560,00	71,30	2,22	38,50
C50-M4	–	–	–	39,28
C70-M1	719,30	91,58	2,88	38,87
C70-M2	664,40	84,59	2,63	40,09
C70-M3	690,50	87,92	1,47	40,74
C70-M4	680,20	86,61	2,49	42,95

200 mm. A Tabela 3.3 mostra os resultados obtidos nos ensaios para módulo de elasticidade do concreto.

Para determinar a resistência à tração do concreto em cada série foram ensaiados três corpos de prova de concreto aos 28 dias de conformidade com a NBR 7222:1994. Os corpos de prova cilíndricos foram moldados com dimensões 100 mm x 200 mm conforme preceitua a NBR 5738:2003. Para o ensaio de tração foram utilizados os mesmos equipamentos usados na determinação da resistência à compressão do concreto. Os resultados para as resistências à tração são apresentados na Tabela 3.4.

Na união entre as partes inferior e superior dos corpos de provas foi utilizado o adesivo epóxi (MC – DUR 1300), cujas características são:

- bicomponente;
- fluído/pastoso;
- mistura A + B cinza.
- densidade 1,6 a 1,8 g/cm<sup>3</sup>.
- consumo 0,8 a 1,0 kg/m<sup>2</sup>, dependendo da

rugosidade do substrato.

- tempo de trabalhabilidade 60 minutos.
- resistência à compressão 60 MPa aos 28 dias.

A determinação dos valores limites que definem a envoltória no estado plano de tensões baseados nos estudos de YU *et al.* (2009), foram apurados por meio de ensaios de tração por compressão diametral. Conforme a NBR7222:1994 foram utilizados corpos de prova cilíndricos com 10 cm de diâmetro e 20 cm de altura.

### 3.3 Avaliação das Tensões Atuantes na Junção

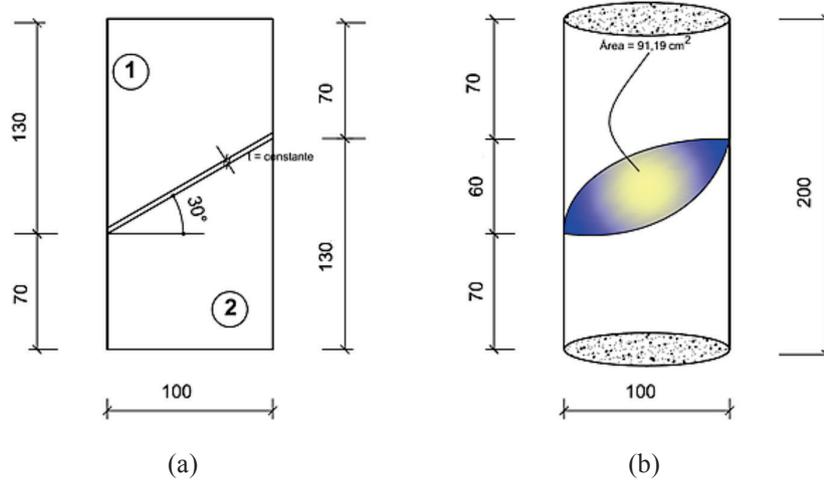
Os corpos de prova para determinar a envoltória de tensões nas juntas são apresentados nas Figuras 3.1 a 3.3. A configuração desse corpo de prova é sempre simétrica para que a utilização de um elemento estrutural de 100 mm x 200 mm gere sempre, por meio do corte, duas peças idênticas que tiveram suas superfícies de contato alteradas para aumento da rugosidade. Essas peças foram coladas com adesivo epóxi e ensaiadas.

**Tabela 3.4** – Resistência à tração do concreto.

Corpos de prova	Força máxima (kN)	Resistência à tração (MPa)	Resistência média da série (MPa)
C20-T1	56,90	1,81	1,81
C50-R1	549,90	6,76	6,15
C50-R2	623,70	6,14	
C50-R3	556,40	6,03	
C50-R4	557,40	5,67	
C70-R1	679,90	5,79	6,42
C70-R2	661,40	6,57	
C70-R3	726,50	6,63	
C70-R4	651,50	6,72	

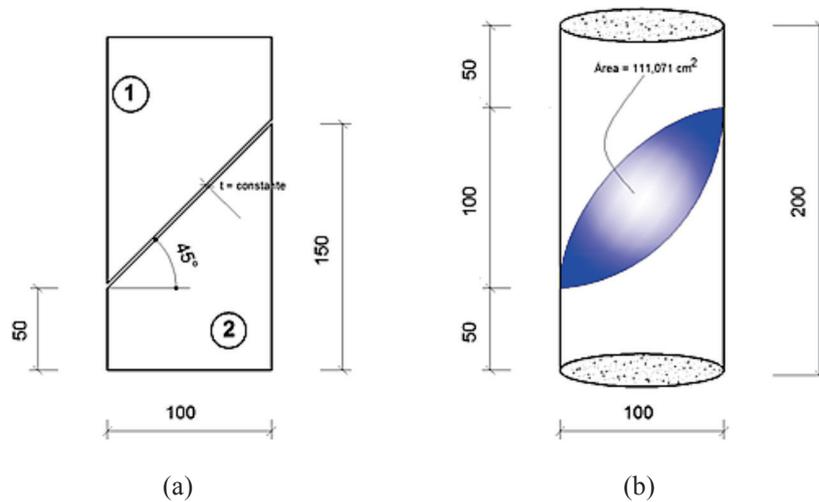
**Tabela 3.5** – Resistência à tração e deformação específica.

Corpos de prova	$f_t$ (MPa)	Deformação específica (%)
C20-T1	1,81	0,034
C50-T1	6,76	0,272
C50-T2	6,14	0,08
C50-T3	6,03	0,149
C50-T4	5,67	0,101
C70-T1	5,79	0,145
C70-T2	6,57	0,117
C70-T3	6,63	0,116



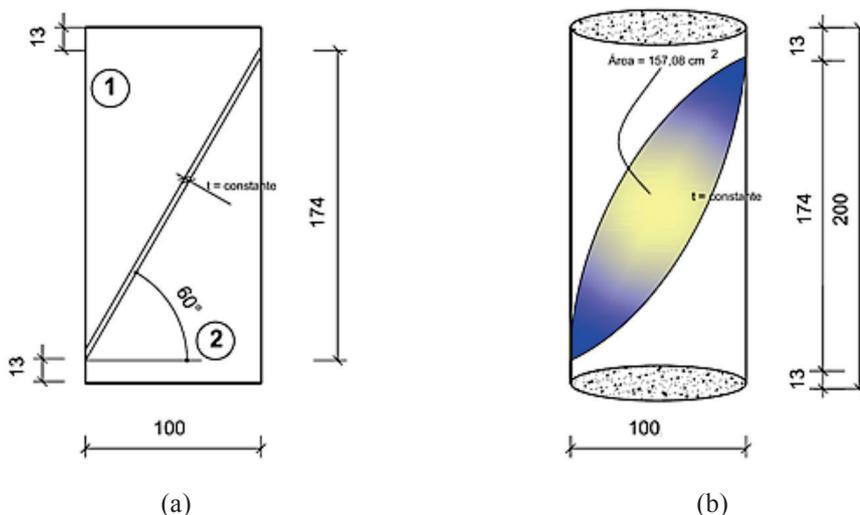
**Figura 3.1** – Determinação das tensões num plano a 30°:

a) seção transversal do corpo de prova; b) dimensões do corpo de prova (medidas em mm).



**Figura 3.2** – Determinação das tensões num plano a 45°:

a) seção transversal do corpo de prova; b) dimensões do corpo de prova (medidas em mm).



**Figura 3.3** – Determinação das tensões num plano a 60°:

a) seção transversal do corpo de prova; b) dimensões do corpo de prova (medidas em mm).

**Tabela 3.6** – Tensões de ruptura das peças ensaiadas com junção a 30°.

Séries	CP	Força máxima (kN)	Tensão máxima (MPa)	Tensão normal (MPa)	Tensão tang. (MPa)
C20S-20I-30°	C20S-20I-30-01	163,60	20,83	15,62	9,02
	C20S-20I-30-02	147,90	18,83	14,12	8,15
	C20S-20I-30-03	153,60	19,56	14,67	8,47
	C20S-20I-30-04	129,60	16,50	12,38	7,15
C20S-30I-30°	C20S-30I-30-01	188,80	24,04	18,03	10,41
	C20S-30I-30-02	115,30	14,68	11,01	6,36
	C20S-30I-30-03	151,80	19,33	14,50	8,37
	C20S-30I-30-04	171,90	21,89	16,42	9,48
C30S-30I-30°	C30S-30I-30-01	199,30	25,38	19,03	10,99
	C30S-30I-30-02	195,10	24,84	18,63	10,76
	C30S-30I-30-03	204,80	26,08	19,56	11,29
	C30S-30I-30-04	173,60	22,10	16,58	9,57
C30S-50I-30°	C30S-50I-30-01	252,80	32,19	24,14	13,94
	C30S-50I-30-02	206,30	26,27	19,70	11,37
	C30S-50I-30-03	257,00	32,72	24,54	14,17
	C30S-50I-30-04	286,80	36,52	27,39	15,81
C50S-50I-30°	C50S-50I-30-01	482,10	61,38	46,04	26,58
	C50S-50I-30-02	442,80	56,38	42,28	24,41
	C50S-50I-30-03	460,00	58,57	43,93	25,36
	C50S-50I-30-04	448,90	57,16	42,87	24,75
C50S-70I-30°	C50S-70I-30-01	333,60	42,48	31,86	18,39
	C50S-70I-30-02	353,00	44,95	33,71	19,46
	C50S-70I-30-03	546,20	69,54	52,16	30,11
	C50S-70I-30-04	487,10	62,02	46,51	26,86
C70S-70I-30°	C70S-70I-30-01	490,60	62,47	46,85	27,05
	C70S-70I-30-02	556,00	70,79	53,09	30,65
	C70S-70I-30-03	484,70	61,71	46,29	26,72
	C70S-70I-30-04	452,50	57,61	43,21	24,95
	C70S-70I-30-05	406,40	51,74	38,81	22,41
	C70S-70I-30-06	402,90	51,30	38,47	22,21

**Tabela 3.7** – Tensões de ruptura das peças ensaiadas com junção a 45°.

Séries	CP	Força máxima (kN)	Tensão máxima (MPa)	Tensão normal (MPa)	Tensão tang. (MPa)
C20S-20I-45°	C20S-20I-45-01	134,20	17,09	8,54	8,54
	C20S-20I-45-02	155,40	19,79	9,89	9,89
	C20S-20I-45-03	156,60	19,94	9,97	9,97
	C20S-20I-45-04	147,90	18,83	9,42	9,42
	C20S-20I-45-05	152,30	19,39	9,70	9,70
C20S-30I-45°	C20S-30I-45-01	138,40	17,62	8,81	8,81
	C20S-30I-45-02	148,80	18,95	9,47	9,47
	C20S-30I-45-03	160,20	20,40	10,20	10,20
	C20S-30I-45-04	137,00	17,44	8,72	8,72
C30S-30I-45°	C30S-30I-45-01	212,00	26,99	13,50	13,50
	C30S-30I-45-02	207,00	26,36	13,18	13,18
	C30S-30I-45-03	207,60	26,43	13,22	13,22
	C30S-30I-45-04	208,40	26,53	13,27	13,27
C30S-50I-45°	C50S-50I-45-01	217,70	27,72	13,86	13,86
	C50S-50I-45-02	306,80	39,06	19,53	19,53
	C50S-50I-45-03	178,70	22,75	11,38	11,38
	C50S-50I-45-04	221,60	28,21	14,11	14,11
C50S-50I-45°	C50S-50I-45-01	379,20	48,28	24,14	24,14
	C50S-50I-45-02	433,10	55,14	27,57	27,57
	C50S-50I-45-03	367,80	46,83	23,41	23,41
	C50S-50I-45-04	409,40	52,13	26,06	26,06
C50S-70I-45°	C50S-70I-45-01	321,90	40,99	20,49	20,49
	C50S-70I-45-02	416,40	53,02	26,51	26,51
	C50S-70I-45-03	390,60	49,73	24,87	24,87
	C50S-70I-45-04	429,40	54,67	27,34	27,34
C70S-70I-45°	C70S-70I-45-01	384,10	48,91	24,45	24,45
	C70S-70I-45-02	353,10	44,96	22,48	22,48
	C70S-70I-45-03	456,70	58,15	29,07	29,07
	C70S-70I-45-04	366,40	46,65	23,33	23,33
	C70S-70I-45-05	348,80	44,41	22,21	22,21
	C70S-70I-45-06	390,50	49,72	24,86	24,86

**Tabela 3.8** – Tensões de ruptura das peças ensaiadas com junção a 60°.

Séries	CP	Força máxima (kN)	Tensão máxima (MPa)	Tensão normal (MPa)	Tensão tang. (MPa)
C20S-20I-60°	C20S-20I-60-01	166,40	21,19	5,30	9,17
	C20S-20I-60-02	116,00	14,77	3,69	6,40
	C20S-20I-60-03	132,10	16,82	4,20	7,28
	C20S-20I-60-04	139,30	17,74	4,43	7,68
C20S-30I-60°	C20S-30I-60-01	153,80	19,58	4,90	8,48
	C20S-30I-60-02	169,00	21,52	5,38	9,32
	C20S-30I-60-03	161,90	20,61	5,15	8,93
	C20S-30I-60-04	161,40	20,55	5,14	8,90
C30S-30I-60°	C30S-30I-60-01	176,90	22,52	5,63	9,75
	C30S-30I-60-02	171,70	21,86	5,47	9,47
	C30S-30I-60-03	181,40	23,10	5,77	10,00
	C30S-30I-60-04	160,10	20,38	5,10	8,83
C30S-50I-60°	C30S-50I-60-01	251,10	31,97	7,99	13,84
	C30S-50I-60-02	217,00	27,63	6,91	11,96
	C30S-50I-60-03	281,60	35,85	8,96	15,53
	C30S-50I-60-04	294,80	37,54	9,38	16,25
C50S-50I-60°	C50S-50I-60-01	179,10	22,80	5,70	9,87
	C50S-50I-60-02	369,50	47,05	11,76	20,37
	C50S-50I-60-03	340,60	43,37	10,84	18,78
	C50S-50I-60-04	323,30	41,16	10,29	17,82
	C50S-50I-60-05	196,00	24,96	6,24	10,81
	C50S-50I-60-06	151,10	19,24	4,81	8,33
C50S-70I-60°	C50S-70I-60-01	226,70	28,86	7,22	12,50
	C50S-70I-60-02	389,50	49,59	12,40	21,47
	C50S-70I-60-03	312,00	39,73	9,93	17,20
	C50S-70I-60-04	377,60	48,08	12,02	20,82
C70S-70I-60°	C70S-70I-60-01	342,70	43,63	10,91	18,89
	C70S-70I-60-02	269,20	34,28	8,57	14,84
	C70S-70I-60-03	275,80	35,12	8,78	15,21
	C70S-70I-60-04	341,30	43,46	10,86	18,82
	C70S-70I-60-05	347,70	44,27	11,07	19,17
	C70S-70I-60-06	270,20	34,40	8,60	14,90

Para a avaliação das tensões principais atuantes na junção, além da tensão de aderência medida nos ensaios anteriores, avalia-se também a capacidade resistente ao cisalhamento. Esse modelo é baseado nos estudos de DASCHNER e KUPFER (1996) *apud* ZILCH e REINECKE (2000), que utilizaram corpos de prova de 100 mm x 200 mm não armados, com inclinação da junta para o estudo das sollicitações de compressão e cisalhamento. Foram adotados para a inclinação das juntas os ângulos de 30°, 45° e 60°.

A nomenclatura dos corpos de prova é  $Cf_cS-f_cI$ -A-N, onde C significa compressão,  $f_cS$  é a resistência média à compressão da peça superior,  $f_cI$  é a resistência característica à compressão da peça inferior, A é o ângulo da junção e N é o número de ordem (de 1 a 4). Na ocorrência de resistências diferentes, a resistência mais elevada será sempre a do elemento inferior. As tensões normais e tangenciais aos planos seguintes expressões:

$$\sigma_n = \sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \sin^2 \theta +$$

$$+ 2 \tau_{xy} \sin \theta \cos \theta$$

(3.1)

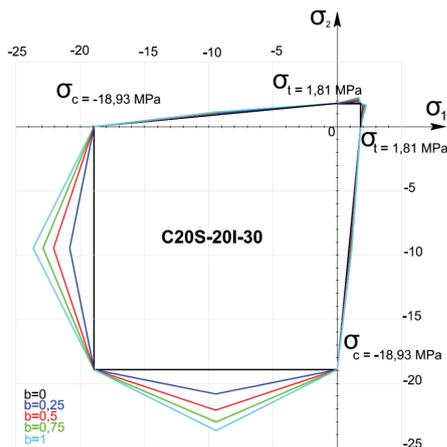
$$\tau_{nt} = -(\sigma_x - \sigma_y) \sin \theta \cos \theta +$$

$$+ \tau_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)$$

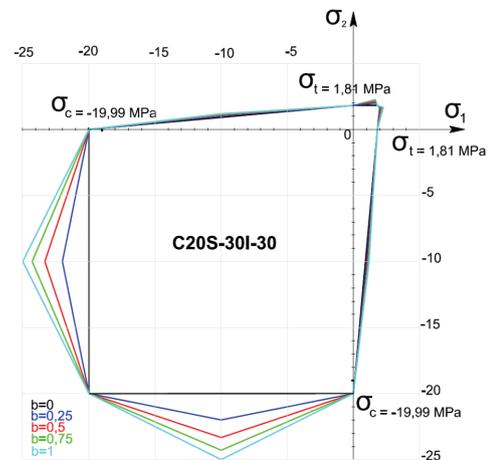
(3.2)

## 4 Envoltórias da TRU

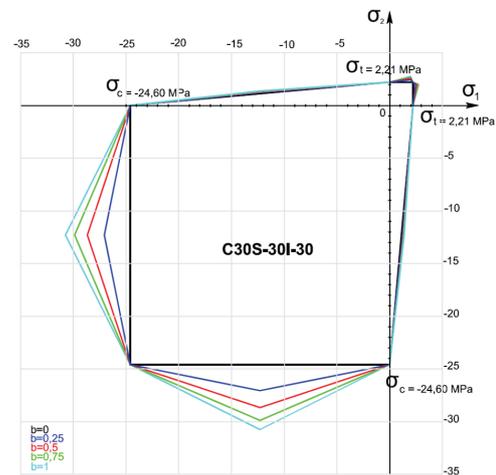
YU *et al.* (2009) expuseram uma série de expressões para representação de envoltórias de ruptura, baseadas nas tensões intermediárias principais e em dois parâmetros que configuram o tipo de material. As envoltórias segundo a TRU são apresentadas nas Figuras 4.1 a 4.21.



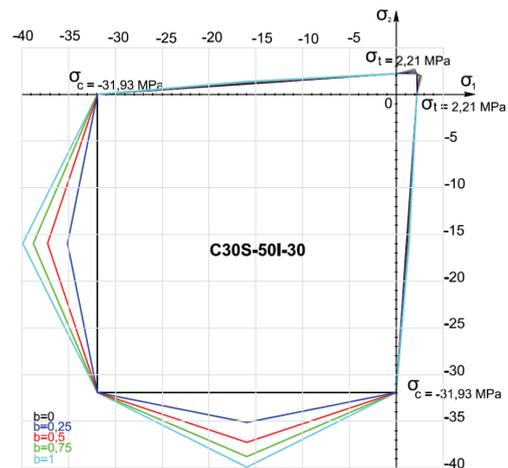
**Figura 4.1** – Envoltórias de YU *et al.* (2009) para a série C20S-20I-30° para  $b = 0$ ,  $b = 0,25$ ,  $b = 0,5$ ,  $b = 0,75$  e  $b = 1$ .



**Figura 4.2** – Envoltórias de YU *et al.* (2009) para a série C20S-30I-30° para  $b = 0$ ,  $b = 0,25$ ,  $b = 0,5$ ,  $b = 0,75$  e  $b = 1$ .



**Figura 4.3** – Envoltórias de YU *et al.* (2009) para a série C30S-30I-30° para  $b = 0$ ,  $b = 0,25$ ,  $b = 0,5$ ,  $b = 0,75$  e  $b = 1$ .



**Figura 4.4** – Envoltórias de YU *et al.* (2009) para a série C30S-50I-30° para  $b = 0$ ,  $b = 0,25$ ,  $b = 0,5$ ,  $b = 0,75$  e  $b = 1$ .

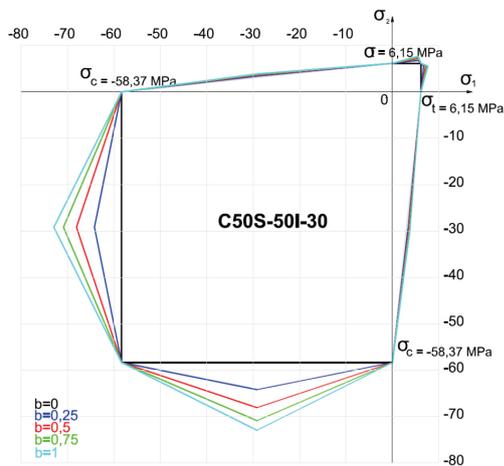


Figura 4.5 – Envoltórias de YU et al. (2009) para a série C50S-50I-30° para  $b = 0$ ,  $b = 0,25$ ,  $b = 0,5$ ,  $b = 0,75$  e  $b = 1$ .

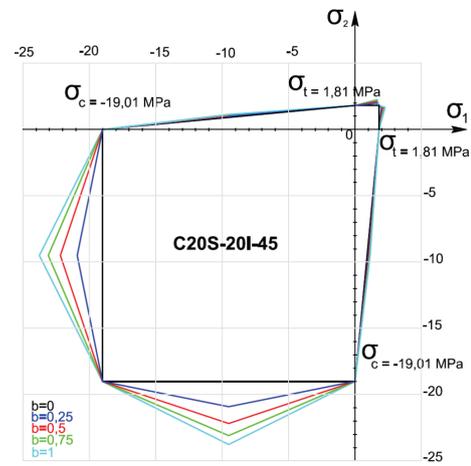


Figura 4.8 – Envoltórias de YU et al. (2009) para a série C20S-20I-45° para  $b = 0$ ,  $b = 0,25$ ,  $b = 0,5$ ,  $b = 0,75$  e  $b = 1$ .

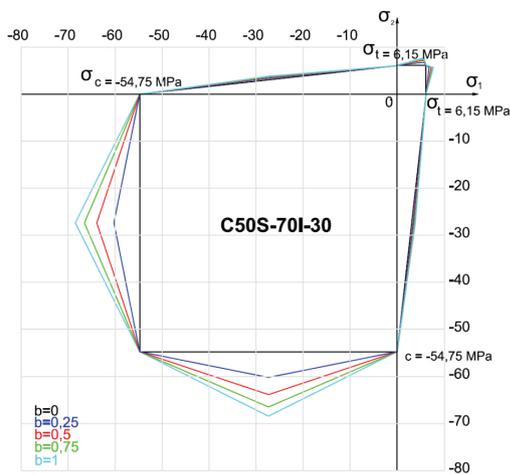


Figura 4.6 – Envoltórias de YU et al. (2009) para a série C50S-70I-30° para  $b = 0$ ,  $b = 0,25$ ,  $b = 0,5$ ,  $b = 0,75$  e  $b = 1$ .

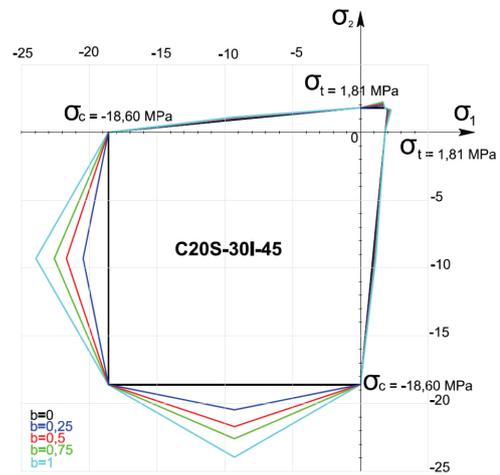


Figura 4.9 – Envoltórias de YU et al. (2009) para a série C20S-30I-45° para  $b = 0$ ,  $b = 0,25$ ,  $b = 0,5$ ,  $b = 0,75$  e  $b = 1$ .

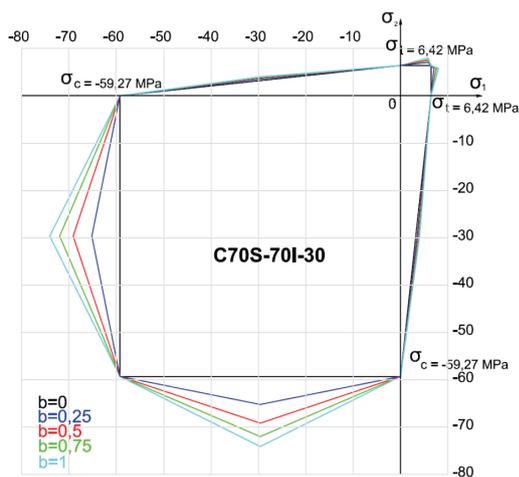


Figura 4.7 – Envoltórias de YU et al. (2009) para a série C70S-70I-30° para  $b = 0$ ,  $b = 0,25$ ,  $b = 0,5$ ,  $b = 0,75$  e  $b = 1$ .

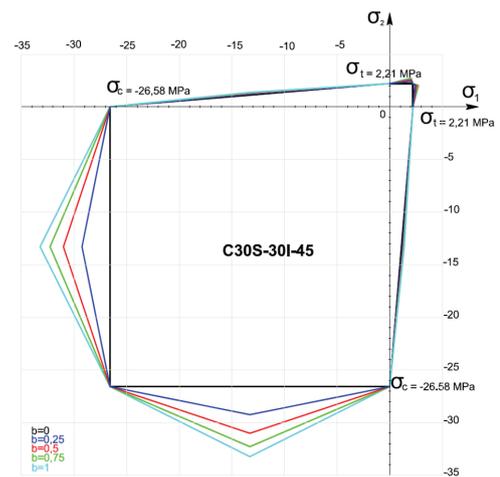


Figura 4.10 – Envoltórias de YU et al. (2009) para a série C30S-30I-45° para  $b = 0$ ,  $b = 0,25$ ,  $b = 0,5$ ,  $b = 0,75$  e  $b = 1$ .

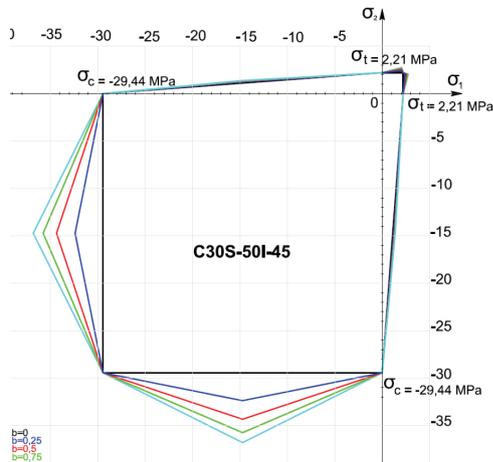


Figura 4.11 – Envoltórias de YU et al. (2009) para a série C30S-50I-45° para  $b = 0$ ,  $b = 0,25$ ,  $b = 0,5$ ,  $b = 0,75$  e  $b = 1$ .

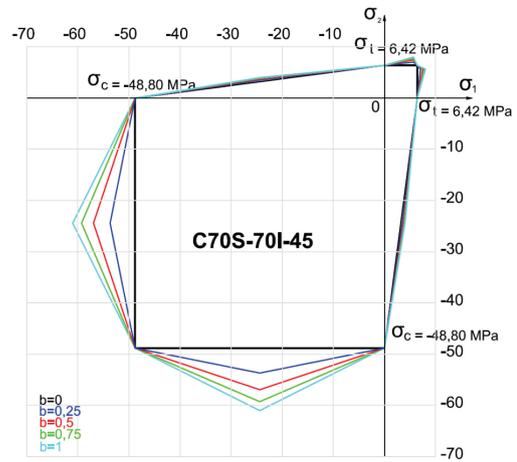


Figura 4.14 – Envoltórias de YU et al. (2009) para a série C70S-70I-45° para  $b = 0$ ,  $b = 0,25$ ,  $b = 0,5$ ,  $b = 0,75$  e  $b = 1$ .

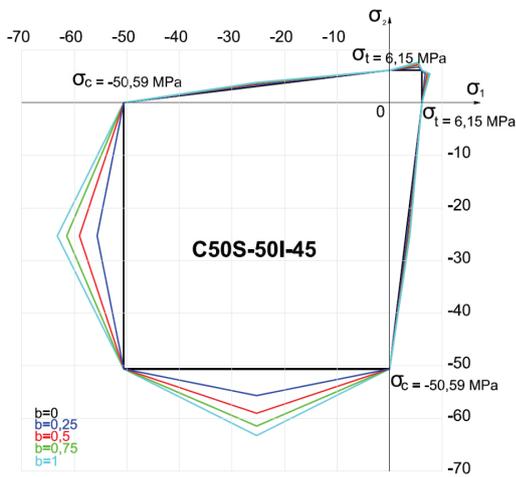


Figura 4.12 – Envoltórias de YU et al. (2009) para a série C50S-50I-45° para  $b = 0$ ,  $b = 0,25$ ,  $b = 0,5$ ,  $b = 0,75$  e  $b = 1$ .

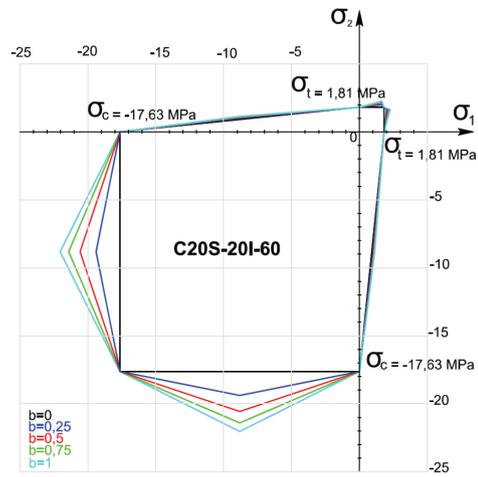


Figura 4.15 – Envoltórias de YU et al. (2009) para a série C20S-20I-60° para  $b = 0$ ,  $b = 0,25$ ,  $b = 0,5$ ,  $b = 0,75$  e  $b = 1$ .

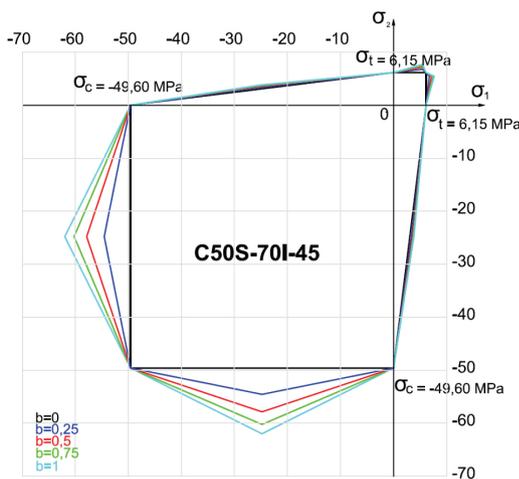


Figura 4.13 – Envoltórias de YU et al. (2009) para a série C50S-70I-45° para  $b = 0$ ,  $b = 0,25$ ,  $b = 0,5$ ,  $b = 0,75$  e  $b = 1$ .

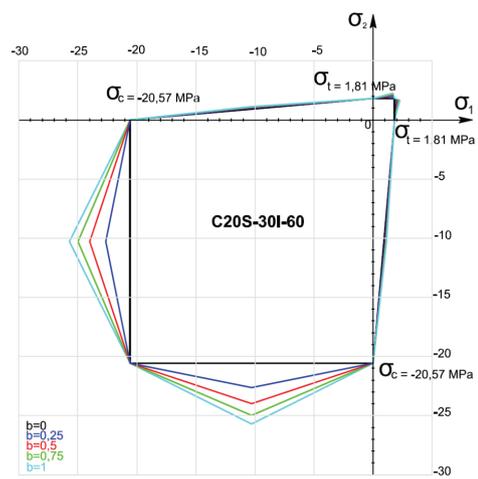


Figura 4.16 – Envoltórias de YU et al. (2009) para a série C20S-30I-60° para  $b = 0$ ,  $b = 0,25$ ,  $b = 0,5$ ,  $b = 0,75$  e  $b = 1$ .

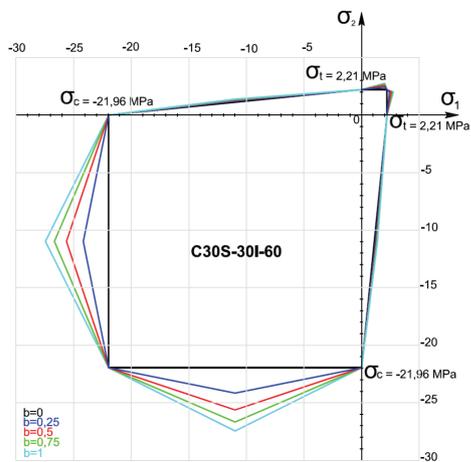


Figura 4.17 – Envoltórias de YU et al. (2009) para a série C30S-30I-60° para  $b = 0$ ,  $b = 0,25$ ,  $b = 0,5$ ,  $b = 0,75$  e  $b = 1$ .

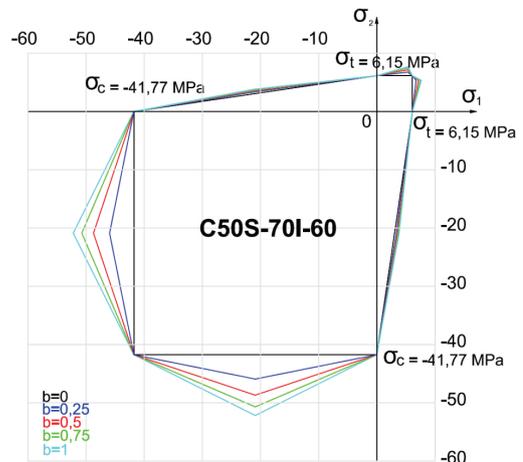


Figura 4.20 – Envoltórias de YU et al. (2009) para a série C50S-70I-60° para  $b = 0$ ,  $b = 0,25$ ,  $b = 0,5$ ,  $b = 0,75$  e  $b = 1$ .

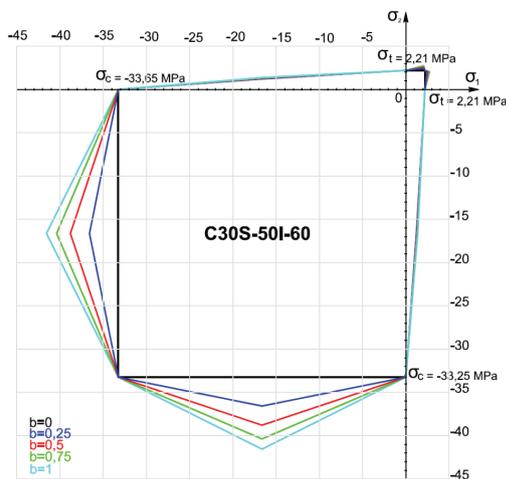


Figura 4.18 – Envoltórias de YU et al. (2009) para a série C30S-50I-60° para  $b = 0$ ,  $b = 0,25$ ,  $b = 0,5$ ,  $b = 0,75$  e  $b = 1$ .

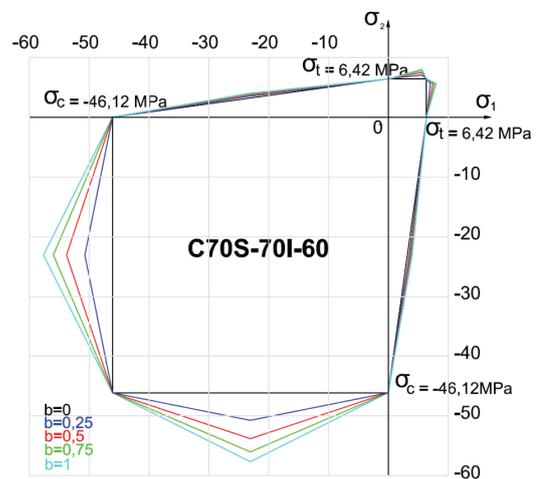


Figura 4.21 – Envoltórias de YU et al. (2009) para a série C70S-70I-60° para  $b = 0$ ,  $b = 0,25$ ,  $b = 0,5$ ,  $b = 0,75$  e  $b = 1$ .

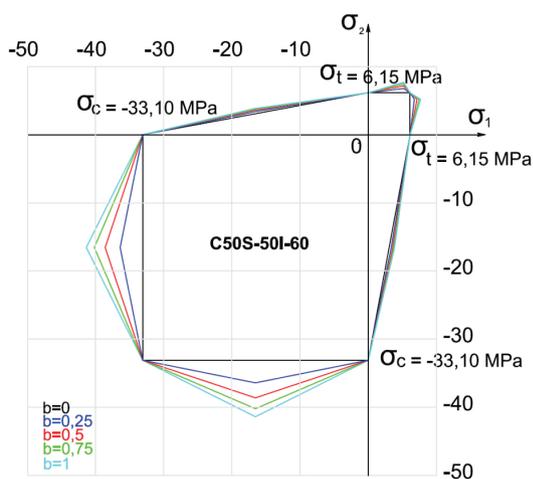


Figura 4.19 – Envoltórias de YU et al. (2009) para a série C50S-50I-60° para  $b = 0$ ,  $b = 0,25$ ,  $b = 0,5$ ,  $b = 0,75$  e  $b = 1$ .

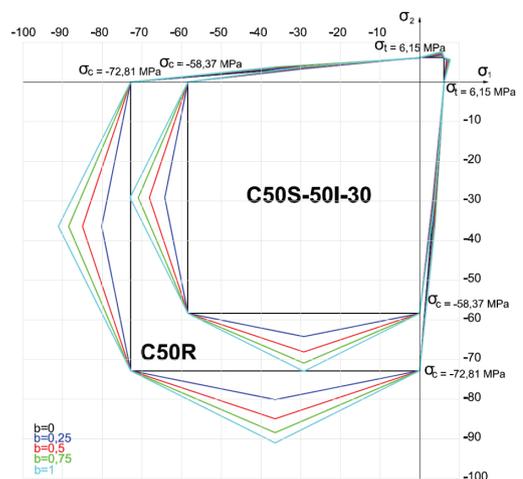
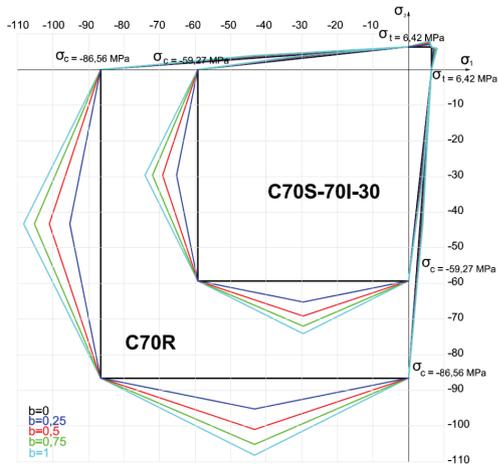


Figura 4.22 – Envoltórias de YU et al. (2009) para as série C50R e C50S-50I-30° para  $b = 0$ ,  $b = 0,25$ ,  $b = 0,5$ ,  $b = 0,75$  e  $b = 1$ .



**Figura 4.23** – Envoltórias de YU et al. (2009) para a série C70R e C70S-70I-30° para  $b = 0$ ,  $b = 0,25$ ,  $b = 0,5$ ,  $b = 0,75$  e  $b = 1$ .

A variação da tensão de ruptura decorrente do limite da resistência à compressão da resina epóxi é mostrado nas Figuras 4.22 e 4.23. A ruptura dos corpos de prova foram monolíticas sem rompimento na junta de colagem. A diminuição na tensão de ruptura foi de 19,83% entre C50R e C50S-50I-30°, e de 31,53% entre C70R e C70S-70I-30°.

## 5 Observações Finais

As envoltórias da TRU, aparentemente de expressões simples, são de implementação trabalhosa. No quadrante correspondente a tração/tração, a expressão 2.91 só apresenta ajuste para a soma entre seus termos e não subtração.

A TRU se mostra mais adequada para materiais metálicos. Essa teoria introduziu dois parâmetros em suas expressões ( $\alpha$  que é a razão em módulo entre as tensões limites de tração e de compressão e o  $b$  que identifica o tipo de material com valores  $0 \leq b \leq 1$ ) para generalizar a utilização de suas envoltórias. Os parâmetros dessa teoria são a tensão de tração, a tensão de compressão e os valores de  $\alpha$  e  $b$ .

Desprezando-se as diferenças já relatadas quanto às singularidades tração/tração e compressão/compressão, nas Figuras 4.1 a 4.21 os valores médios dos quadrantes apresentam valores adequados para o material concreto, definido pelo valor de  $\alpha$  e  $b = 1$ .

## Referências Bibliográficas

- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR5738 – **Procedimento para moldagem e cura de corpos-de-prova** – Método de ensaio. Rio de Janeiro, RJ, Brasil, dez. 2003.
- \_\_\_\_\_. NBR7222 – **Determinação da resistência à tração por compressão diametral de corpos-de-prova cilíndricos** – Método de ensaio. Rio de Janeiro, RJ, Brasil, mar. 1994.
- \_\_\_\_\_. NBR6118 – **Projeto de estruturas de concreto – Procedimento**, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, abr. 2004.
- \_\_\_\_\_. NBR8522 – **Concreto – Determinação do módulo estático de elasticidade à compressão – Método de ensaio**, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, abr. 2008.
- CHEN, W. **Plasticity in reinforced concrete**. 1ed. USA: J.Ross Publishing, 2007. 474p.
- COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BÉTON. FIB BULLETIN 55: **Model Code 2010, First complete draft**. London, Thomas Telford, v. 1, 2010.
- COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BÉTON. FIB BULLETIN 42: **Constitutive modeling of high strength/high performance concrete**. Stuttgart, 2008.
- EUROPEAN COMMITTEE FOR STANDARDIZATION, STANDARD EN 1992-1-1:2004, **Eurocode 2: Design of concrete structures – Part 1-1: General rules and rules for buildings**. Bruxelles, Belgique, Dec., 2004.
- FIB STRUCTURAL CONCRETE. **Textbook on behaviour, design and performance**. Update knowledge of the CEB/FIP Model Code 1990. Committee Euro-International du Beton. v. 1. 1999.
- HASHIGUCHI, K. **Elastoplasticity theory**. LNACM. Berlin: Springer, v. 42. 2009. 407p.
- LUBLINER, J. **Plasticity theory**. USA: Pearson Education, Inc., 2006. 528p.
- MAEKAWA, K.; PIMANMAS, A.; OKAMURA, H. **Nonlinear mechanics of reinforced concrete**. USA: Spon Press, 2004. 721p.
- NIELSEN, M. P. **Limit analysis and concrete plasticity**. 2ed. USA: CRC Press, 1999. 908p.
- YU, M. **Unified strength theory and its applications**. 1ed. Germany: Springer, 2004. 412p.
- YU, M.; MA, G.; LI, J. **Structural plasticity: limit, shakedown and dynamic plastic analysis of structures**. 1ed. USA: Springer, 2009. 384p.
- YU, M.; MA, G.; QIANG, H. ZHANG, Y. **Generalized plasticity**. First ed. Germany: Springer, 2006. 447p.