

Aplicação do Método da Anulação dos Deslocamentos via M.E.F. para Determinação das Forças de Protensão dos Cabos de Pontes Estaiadas

Carlos Augusto Moreira Filho¹

José Elias Laier²

Resumo

Os avanços tecnológicos promovidos pela indústria dos materiais de construção civil, junto ao desenvolvimento de melhores técnicas construtivas têm por objetivo reduzir o consumo de material das estruturas. Isto proporciona o desenvolvimento de pontes mais esbeltas, e flexíveis, capazes de transpor vãos cada vez maiores. As pontes estaiadas são exemplos de estruturas esbeltas e flexíveis onde a capacidade de utilização dos materiais tem grande importância. Neste sentido, para garantir a melhor utilização dos materiais envolvidos (aço e concreto, por exemplo), é preciso determinar as forças de protensão aplicadas aos cabos. Este artigo apresenta o algoritmo do método da anulação dos deslocamentos, M.A.D., para obtenção das forças de protensão dos cabos por meio de análise estática não-linear geométrica via método dos elementos finitos, M.E.F. Na análise da ponte estaiada por M.E.F. são levadas em consideração as não-linearidades decorrentes do efeito de catenária dos cabos, e o efeito viga/coluna. O método da anulação dos deslocamentos tem por mérito tornar nulos ou suficientemente pequenos os deslocamentos verticais em pontos de controle, aproximando a configuração deslocada da estrutura da configuração de referência. A configuração de referência de uma ponte estaiada é entendida como aquela determinada no projeto arquitetônico. A configuração deslocada da estrutura sob a ação do peso-próprio pode ser bastante diferente da configuração de referência. O presente artigo tem por objetivo apresentar estas diferenças em deslocamentos do tabuleiro e forças axiais dos cabos ao se realizar uma análise puramente estática da estrutura sob a ação do peso-próprio, em comparação a uma análise onde se aplica o método M.A.D.

Palavras-chave: Pontes estaiadas; Método da Anulação dos Deslocamentos; Método dos Elementos Finitos.

1 Introdução

As pontes e viadutos passaram a ter uma importância, além de sua função principal, que é transpor obstáculos, de figurar como modeladores da paisagem de uma cidade, ou país, servindo de marcos arquitetônicos locais. Os modelos estruturais de pontes que estão em destaque na atualidade, tanto pela beleza quanto pela eficiência estrutural, são as pontes com suporte de cabos. Essas pontes são conhecidas por transporem grandes vãos com uso de pouco material.

Os cabos têm um comportamento não linear geométrico proveniente do efeito de catenária. Então, para obter a resposta mecânica da estrutura de forma mais condizente com a realidade, faz-se necessária a

consideração do comportamento não linear dos estais na modelagem da estrutura.

Os cabos, quando submetidos à tração, aumentam sua rigidez aparente, e não oferecem resistência ao serem comprimidos. Portanto, a força de tração atuante nos cabos de uma ponte estaiada é o elemento de grande importância para determinar a configuração deslocada da estrutura.

Neste trabalho as pontes estaiadas são modeladas com elementos finitos de pórtico, e treliça, que podem ser encontrados na literatura clássica como Zienkiewicz e Taylor (2000), Assan (2003), Reddy (2004) com a formulação em campos de deslocamentos, ou seja, as incógnitas do problema são os deslocamentos, transversal e axial, e as rotações.

1 Universidade de São Paulo – Campus de São Carlos/ Departamento de Engenharia de Estruturas/ carlosmoreira@usp.br

2 Universidade de São Paulo – Campus de São Carlos/ Departamento de Engenharia de Estruturas/ jelaier@sc.usp.br

As não-linearidades consideradas na formulação dos elementos finitos são o efeito viga/coluna para os elementos finito de pórtico, e a não-linearidade dos cabos, obtida com elemento finito de treliça com módulo de elasticidade de Dischinger, desenvolvido por Ernst em 1965.

Não-linearidade do Cabo

Os cabos fornecem apoios elásticos ao longo do tabuleiro das pontes estaiadas. A rigidez destes apoios dependem da força de tração atuante nos cabos, pois afetam diretamente a catenária existente no cabo.

Para simular o cabo por elemento finito, Fleming (1979), Neves (1990), Wang Tseng e Yang (1993), Wang e Yang (1996), Wang, Lin e Tang (2002), fazem uso de um único elemento de treliça, com módulo de elasticidade de Dischinger, conhecido também por módulo de elasticidade equivalente, para obter o efeito da catenária do cabo. O módulo de elasticidade de Dischinger é dado por:

$$E_{eq} = \frac{E}{1 + \frac{(w.L_h)^2 EA}{12T^3}} \quad (1)$$

onde E_{eq} é o módulo de elasticidade de Dischinger do cabo, E é o módulo de elasticidade do aço, w é o peso por unidade de comprimento do cabo, L_h é o comprimento da projeção horizontal do cabo, A é a área da seção transversal do cabo, e T é a força de tração aplicada ao cabo.

Walther *et al.* (1998) mostra a variação da razão entre o módulo de elasticidade equivalente e o módulo de elasticidade real em função do comprimento da

projeção horizontal. O autor varia a tensão de tração aplicada ao cabo entre $0,05\sigma$ e $0,5\sigma$, onde σ é a tensão de ruptura do cabo.

Observa-se da Figura 1 que para tensões de tração de $0,05\sigma$ e uma projeção horizontal do cabo de 100 m, por exemplo, tem-se que o módulo de elasticidade equivalente do cabo é menor que 40% do valor real do material. Para valores grandes da projeção horizontal do cabo, é necessário uma grande força de tração para obter respostas satisfatórias para rigidez do cabo, de modo que reduza os deslocamentos verticais do tabuleiro.

Determinação das Forças de Protensão pelo Método da Anulação dos Deslocamentos

O método da anulação dos deslocamentos, M.A.D., tem por objetivo aproximar a configuração deslocada da estrutura à configuração de referência. A configuração de referência é a aquela dada pelo projeto arquitetônico. Este método foi apresentado por Wang, Tseng e Yang (1993).

O método M.A.D. monitora pontos de controle, que são nós escolhidos para que sejam aplicados os testes de convergência do método. Em geral, esses nós são pontos de interseção entre os cabos e o tabuleiro. O método M.A.D. determina, iterativamente, quais as forças de protensão que atuam nos cabos de modo a fornecer um deslocamento vertical do ponto de controle suficientemente pequeno, isto é, menor que uma tolerância (ϵ_s). O critério de parada é dado por:

$$\epsilon_a^{M.A.D.} = \frac{\text{Deslocamento Vertical no ponto de controle}}{\text{Vão Principal}} \leq \epsilon_s \quad (2)$$

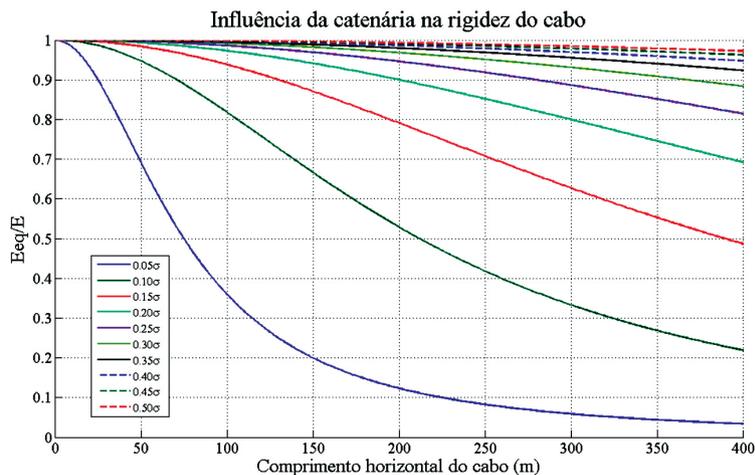


Figura 1 – Variação da razão entre módulo de Dischinger e módulo de elasticidade real em função do comprimento da projeção horizontal do cabo [Walther *et al.*, 1988 – adaptado].

Para se ter a configuração deslocada inicial o vetor de forças externas é obtido apenas com as componentes referentes ao peso próprio dos elementos estruturais, onde a não linearidade da catenária do cabo é levada em consideração pelo módulo de elasticidade equivalente, como mostrado pela Equação (1).

O método precisa de um ponto de partida, uma estimativa para força de tração nos cabos, pois caso não haja uma força de tração, é fácil notar que o termo divisor da Equação (1) tende ao infinito e, por consequência, a rigidez equivalente do cabo tende a zero.

O método que Wang, Lin e Tang (2002) sugerem para estimar a força inicial atuante em todos os cabos é assumir que a razão entre o E_{eq}/E é de 80%. Desenvolvendo-se a equação (1) a força de tração no cabo para estimativa inicial é dada por:

$$T = \sqrt[3]{\frac{E \cdot A \cdot (w \cdot L_h)^2}{3}} \quad (3)$$

A etapa seguinte é resolver as equações de equilíbrio iterativamente, utilizando o método de Newton-Raphson. Ao final do ciclo iterativo de equilíbrio, obtém-se as forças internas dos elementos. Neste ponto, a estrutura encontra-se em equilíbrio, entretanto não atende aos requisitos de convergência para configuração de referência. É realizado o ciclo de iteração de forma que busca a configuração de referência da estrutura.

Então as forças axiais de todos elementos (cabos e viga/coluna) são as forças de protensão iniciais a que a estrutura está submetida. Com isso o novo vetor de forças externas nas coordenadas globais é dado por:

$$P^i = F^0 - F_{prot}^{i-1} \quad (4)$$

onde P^i é o novo vetor de forças externas da i -ésima iteração de forma, F^0 é o vetor de forças externas inicial, e F_{prot}^{i-1} é o vetor das forças de protensão atuante nos elementos estruturais, obtido na iteração anterior, rotacionados para o sistema de coordenadas globais.

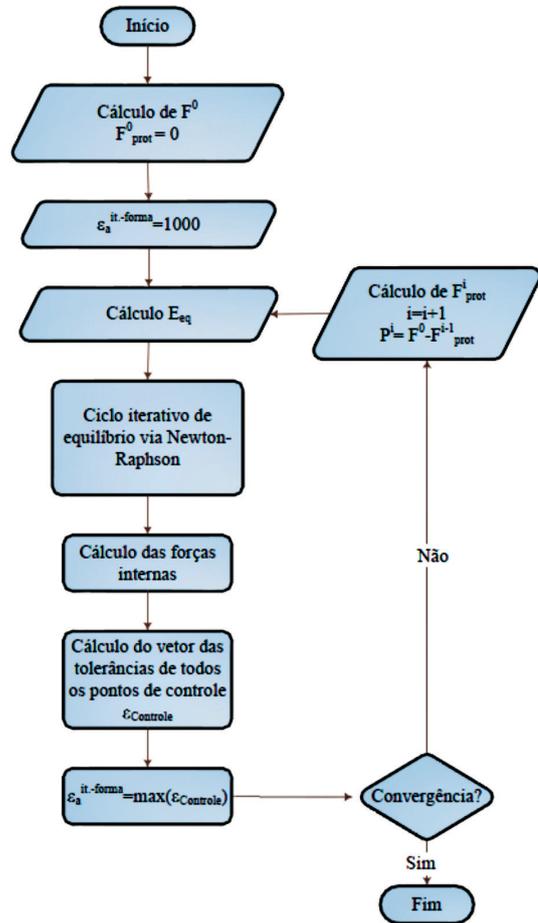


Figura 3 – Fluxograma do método M.A.D.

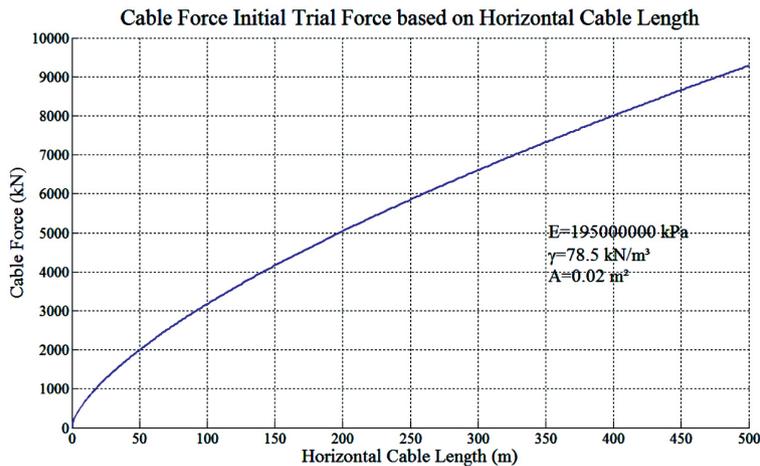


Figura 2 – Curva da estimativa inicial da força do cabo em função do comprimento em projeção horizontal do cabo para uma relação E_{eq}/E de 80% para o cabo com os dados fornecido no gráfico.

Com o novo vetor de forças externas um novo ciclo de equilíbrio é iniciado até se atingir a convergência do método. É fácil notar que a medida que as forças de protensão, F_{prot} , aumentam, o vetor de forças externas atualizado, P^i , diminui, o que repercute em menores valores de deslocamento vertical no tabuleiro, o que o aproxima da configuração de referência.

A Figura 3 mostra o fluxograma do método M.A.D.

Exemplo Numérico

O exemplo numérico para aplicação do método M.A.D. tem por objetivo explicitar as diferenças obtidas nos deslocamentos verticais do tabuleiro quando se aplicam forças de protensão e quando os estais não sofrem uma protensão inicial.

O exemplo adotado pode ser encontrado no trabalho de Wang, Tseng e Yang (1993) para maiores detalhes. Consiste em um caso de uma ponte estaiada com extensão total de 609,60 m, 12 cabos com configuração em harpa, 2 torres, onde o vão principal tem 335,28 m de comprimento, e os vãos laterais 137,16 m.

A estrutura foi discretizada em 20 elementos finitos de pórtico, representando os elementos estruturais do tabuleiro e das torres, e 12 elementos finitos

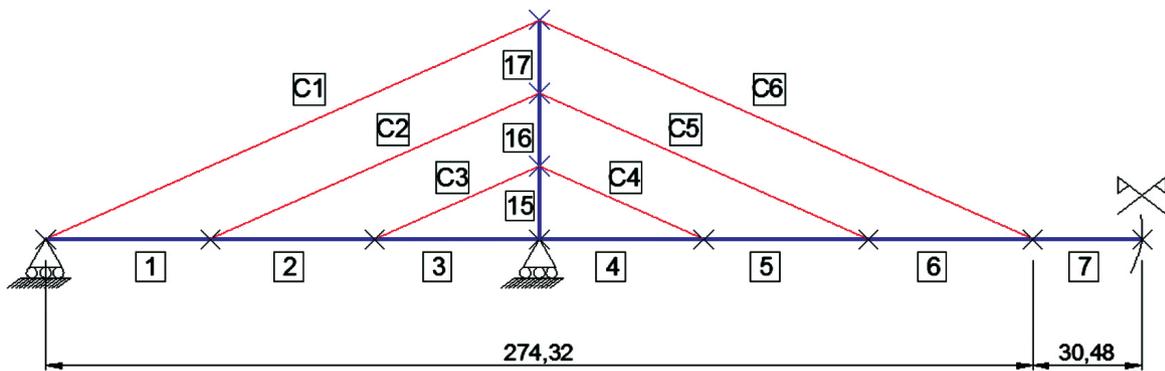
de treliça com módulo de elasticidade de Dischinger para simular os cabos da ponte, conforme a figura a seguir. As propriedades dos materiais, e das seções são dadas na Tabela 1. Os pontos de controle adotados foram os nós 5, 6 e 7.

As configurações deslocadas das análises estática não-linear sem aplicação do método M.A.D., e com aplicação da força de protensão pelo método M.A.D. são apresentados a seguir na Figura 4, onde o fator de escala que multiplica os deslocamentos é de 10 vezes.

As forças de protensão aplicadas nos cabos, determinadas pelo método M.A.D., são mostradas graficamente na Figura 5 ao lado das forças axiais finais dos cabos. Os valores apresentados são as forças de tração média ao longo do cabo.

Os valores dos deslocamentos verticais, encontrados na Figura 6 podem ser obtidos por programas comerciais ao se aplicar as forças de protensão determinadas pelo método M.A.D. Os valores dos deslocamentos verticais podem diferir um pouco dependendo da teoria adotada por cada programa comercial para modelagem dos cabos.

A Figura 6 mostra os valores do deslocamento vertical dos nós do tabuleiro quando se aplica ou não o método M.A.D., e mostra qual a redução percentual dos deslocamentos quando se aplica o método M.A.D. em relação à análise sem aplicação de forças de protensão.



nº figura esta repetido

Figura 3 – Geometria da ponte estaiada com configuração em harpa com eixo de simetria e a numeração dos elementos finitos.

Tabela 1 – Propriedades geométricas e dos materiais.

Elemento Estrutural	E (MPa)	w (kN/m)	Área (m ²)	I (cm ⁴)	σ (MPa)
E1-E14	206800	87,563	0,32	1,131 x 10 ⁸	–
E15 e E18	206800	–	0,269	4,315 x 10 ⁷	–
E16 e E19	206800	–	0,228	3,452 x 10 ⁷	–
E17 e E20	206800	–	0,203	2,106 x 10 ⁷	–
C1,C6,C7 e C12	206800	3,225	0,042	–	1700
C2-C5 e C8 – C11	206800	1,24	0,016	–	1700

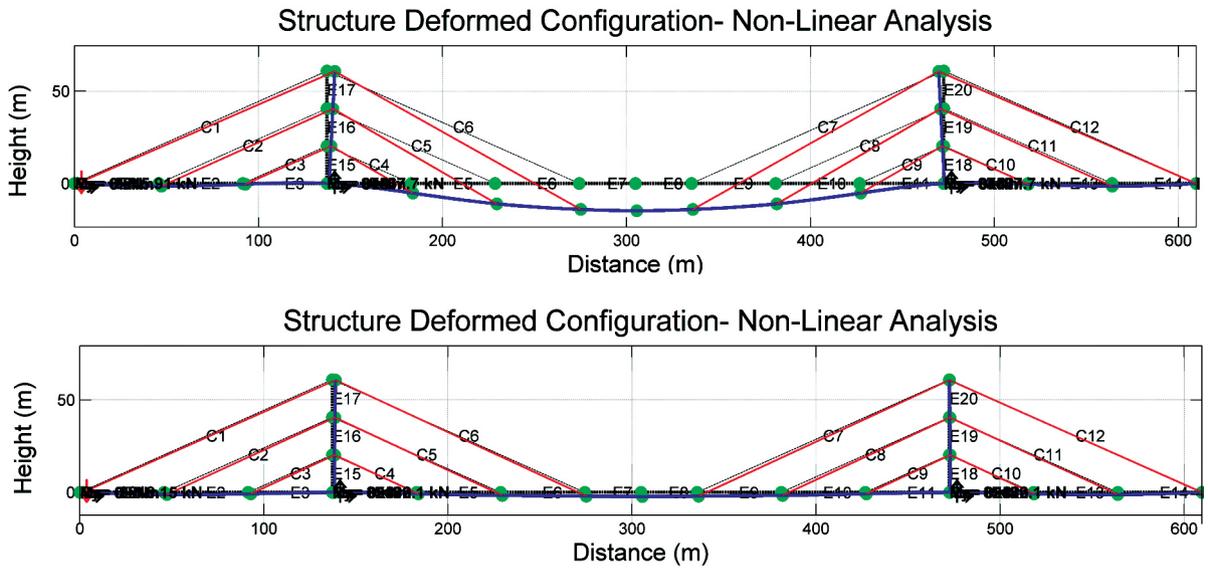


Figura 4 – Configurações deslocadas da estrutura com a análise não-linear (acima), e com análise não-linear com o método M.A.D. (abaixo).

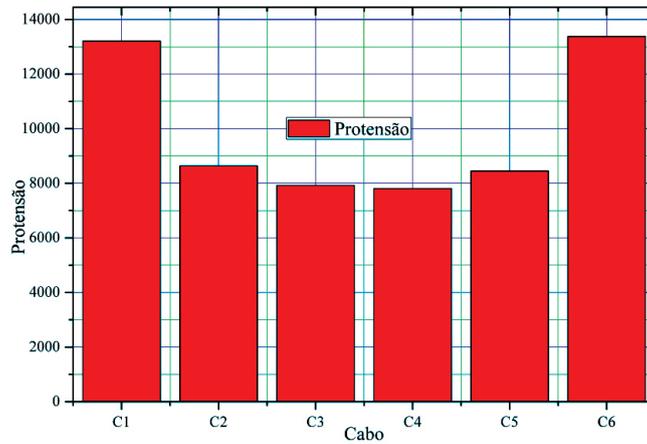


Figura 5 – Forças de protensão obtidas pelo método M.A.D.

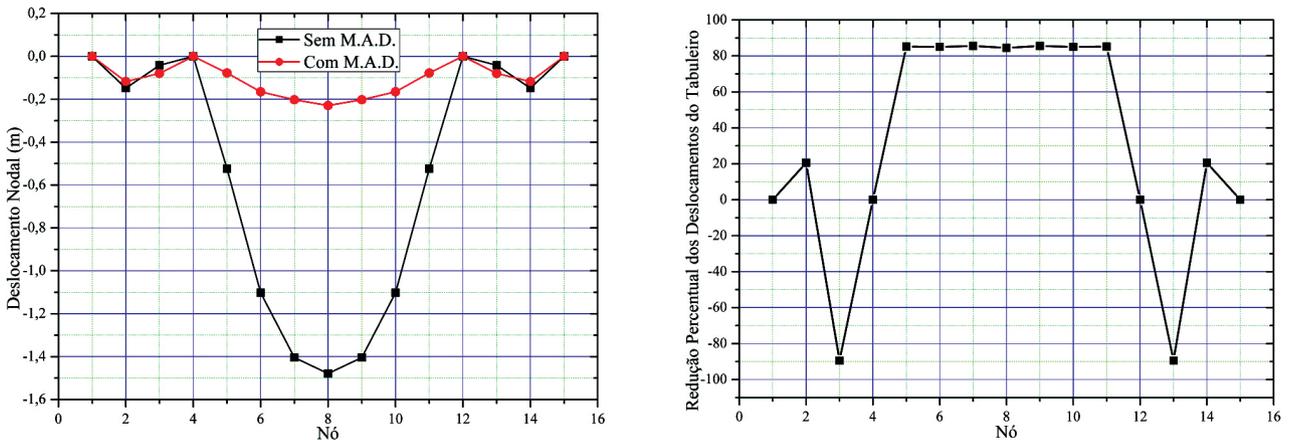


Figura 6 – Deslocamento vertical dos nós do tabuleiro (esquerda), e redução percentual dos deslocamentos do tabuleiro (direita).

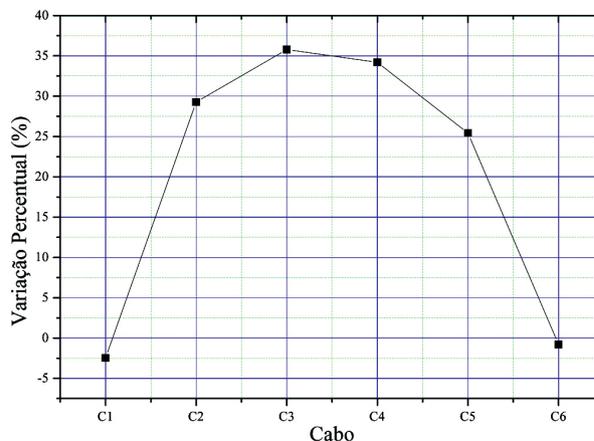
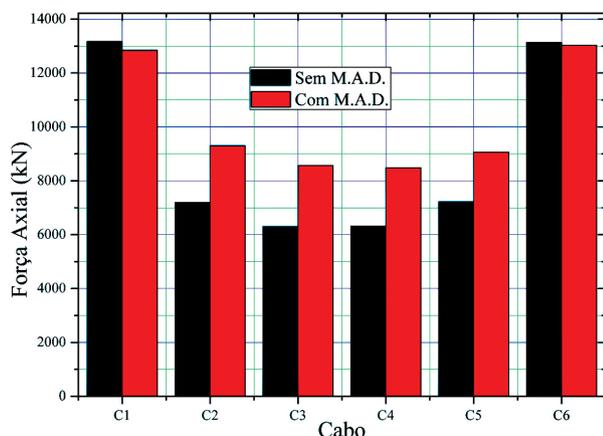


Figura 7 – Forças axiais nos cabos sem/com aplicação do método M.A.D. (esquerda), e variação percentual das forças axiais nos cabos em relação a análise sem aplicação do método M.A.D. (direita).

A Figura 7 mostra os valores finais médios das forças axiais atuantes nos cabos para análise sem e com aplicação do método M.A.D. Houve um aumento médio das forças axiais atuantes no cabo em 20% para a configuração deslocada obtida com o método M.A.D. Os cabos C1 e C6, e C7 e C12 apresentaram redução, mas os cabos restantes tiveram suas solicitações axiais aumentadas.

Conclusões

Existem várias técnicas para obtenção das forças de protensão dos cabos de pontes estaiadas, desde métodos simples, onde os cabos são substituídos por apoios do primeiro gênero no tabuleiro, até métodos de otimização sofisticados utilizando algoritmos genéticos e curvas spline.

O método M.A.D., proposto por Wang, Tseng e Tang (1993) é de simples implementação computacional, e obtém reduções significativas dos deslocamentos verticais do tabuleiro sem muito esforço computacional.

O método M.A.D. apresenta-se como boa ferramenta para obtenção das forças de protensão que produzam pequenos deslocamentos no tabuleiro. No exemplo numérico, a relação entre o deslocamento vertical no meio do vão principal e o comprimento do vão principal foi de 1/1500 aproximadamente. As forças de protensão do método M.A.D. foram capazes de reduzir os deslocamentos no vão principal, em média, 85%.

Enquanto a redução média dos deslocamentos verticais do vão central do tabuleiro manteve-se

em 85% quando se aplica o método M.A.D., as forças axiais solicitantes nos cabos aumentaram em média 20% apenas.

Referências

- ASSAN, A. E. Método dos elementos finitos: primeiros passos. 2ª. ed. Campinas, SP: Editora Unicamp, p. 298, 2003.
- FLEMING, J. F. Nonlinear static analysis of cable-stayed bridge structures. *Computers & Structures*, v. 10, p. 621-635, 1979.
- NEVES, F. A. Vibrações de estruturas aperticadas espaciais estaiadas. 1990. 168p. Tese (Mestrado) – COPPE-UFRJ, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 1990.
- REDDY, J. N. An introduction to nonlinear finite element analysis. Oxford University Press, p. 488, 2004.
- WALTHER, R. *et al.* Cable stayed bridges. London: Thomas Telford Publishing, p. 225, 1998.
- WANG, P. H.; LIN, H. T.; TANG, T. Y. (2002). Study on nonlinear analysis of a highly redundant cable-stayed bridge. *Computers & Structures*, v. 80, p. 165-182, 2002.
- WANG, P. H.; TSENG, T. C.; YANG, C. G. (1993). Initial shape of cable-stayed bridges. *Computers & Structures*, v. 47, p. 111-123, 1993.
- ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L. (2000). The finite element method, 5ed., Oxford: Butterworth-Heinemann, Vol I, 2000.