

Matrizes de Transferência de Forças e Deslocamentos para Seções Intermediárias de Elementos de Barra

Walter Francisco HurtaresOrrala¹
Sílvia de Souza Lima²

Resumo

A determinação automatizada de diagramas de forças e deslocamentos de elementos de barra pode ser feita de maneira eficiente com a utilização de matrizes de transferência, de força e deslocamento. Dessa forma, calculam-se forças e deslocamentos em seções intermediárias quaisquer. Neste trabalho se faz resgate deste conhecimento, tendo em vista a sua importância no desenvolvimento de procedimentos automáticos de traçado de diagramas e deformações.

Palavras-chave: análise estrutural, traçado de diagramas, matriz de transferência, pórticos planos.

1 Introdução

O método dos deslocamentos é o método mais utilizado no desenvolvimento de diagramas automáticos para a análise estrutural.

Como resultado direto da análise de uma estrutura com utilização do método dos deslocamentos, são obtidos nos pontos nodais do modelo de análise (Figura 1), os deslocamentos.

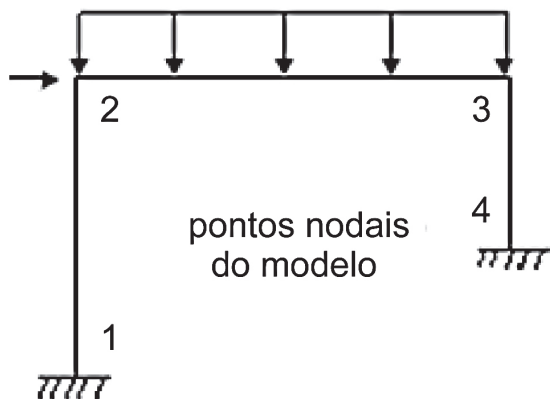


Figura 1 – Modelo de análise.

Para a determinação dos diagramas de forças e deformadas, ao longo dos elementos constituintes da estrutura, é necessário o cálculo daquelas forças e deslocamentos em seções não coincidentes e não representadas pelos pontos nodais do modelo.

Uma abordagem eficiente para isto é a utilização de matrizes de transferência. Essas matrizes são funções do tipo de carregamento atuante no elemento.

Neste trabalho resgata-se este conhecimento, apresentando tais matrizes para os tipos de carregamentos mais usuais em elementos de barra.

Ressalta-se a importância da técnica no desenvolvimento de procedimentos automáticos, na fase de pós-processamento, para a obtenção de diagramas e deformadas.

2 Cálculo de forças em uma seção intermediária de elementos de barra

O arranjo dos elementos das matrizes é tal que o procedimento de cálculo consiste em duas etapas, a saber:

Primeira Etapa

Consideram-se as forças decorrentes das ações diretamente aplicadas ao elemento. Apresentam-se dois tipos de cargas: o de carga concentrada e o de carga uniforme total.

A carga concentrada pode ser força ou momento, como mostrado na Figura 2.

1 Mestrando do Programa de Projeto de Estruturas da Escola Politécnica da UFRJ, Brasil – waltehur@hotmail.com
2 Professor associado da Escola Politécnica da UFRJ, Brasil, sdesouzalima@gmail.com

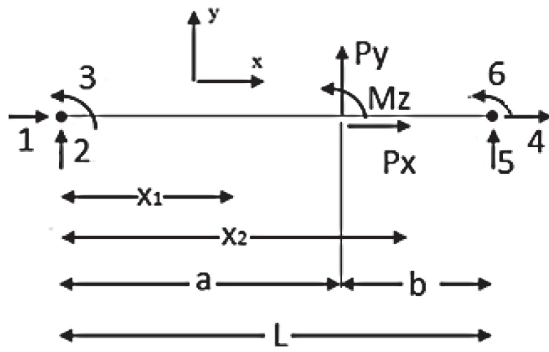


Figura 2 – Elemento de viga com cargas concentradas

Neste caso, tem-se:

$$\mathbf{X}_C = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_2 - L & -1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

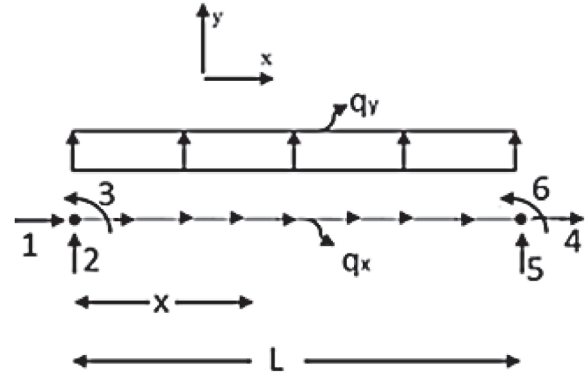
e

$$\mathbf{W}_C = \begin{bmatrix} -\frac{b}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{b^2(3a+b)}{L^3} & \frac{6ab}{L^3} \\ 0 & -\frac{ab^2}{L^2} & \frac{b(2a-b)}{L^2} \\ -\frac{a}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{a^2(a+3b)}{L^3} & -\frac{6ab}{L^3} \\ 0 & \frac{a^2b}{L^2} & \frac{a(2b-a)}{L^2} \end{bmatrix} \quad (2)$$

onde $\mathbf{X}_C$ é uma matriz de transferência de forças para seções ao longo do comprimento do elemento estrutural, tanto à esquerda quanto à direita do local de aplicação da carga concentrada.

Na matriz deve-se observar que $x_1 \leq a$ e que $a \leq x_2 \leq L$. $\mathbf{X}_C$ é a matriz que fornece as forças de engastamento perfeito, sendo definida pelas distâncias a e b da Figura 2.

A carga uniforme é apresentada como aplicada no vão inteiro, como mostrado na Figura 3.



Para carga uniforme total, tem-se:

$$\mathbf{X}_U = \begin{bmatrix} -\frac{2x_1}{L} + 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2x_1}{L} - 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{x_1^2}{L} + x_1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2x_2}{L} - 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{2x_2}{L} + 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{x_2^2}{L} - x_2 & -1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

e

$$\mathbf{W}_U = \begin{bmatrix} -\frac{L}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{L}{2} \\ 0 & -\frac{L^2}{12} \\ -\frac{L}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{L}{2} \\ 0 & \frac{L^2}{12} \end{bmatrix} \quad (4)$$

onde $\mathbf{X}_U$ é a matriz de transferência de forças definida ao longo do comprimento do elemento estrutural. $\mathbf{X}_U$ é o vetor que fornece as forças de engastamento perfeito para a carga uniforme total.

Portanto, seja qual for o tipo de carregamento, pode-se escrever:

$$\mathbf{T}_C = \mathbf{X}_C \mathbf{W}_C \quad (5)$$

ou

$$\mathbf{T}_U = \mathbf{X}_U \mathbf{W}_U \quad (6)$$

Dessa forma, o vetor das forças internas na

seção intermediária expressas no sistema local, obtidas na primeira etapa será:

$$f_{etapa1} = T_U \begin{Bmatrix} P_x \\ P_y \\ M_z \end{Bmatrix} \quad (7)$$

Para carga concentrada, ou

$$f_{etapa1} = T_U \begin{Bmatrix} q^x \\ q_y \end{Bmatrix} \quad (8)$$

para carga uniforme total. As grandezas estão expressas no sistema local de referência.

Segunda etapa

Consideram-se as forças decorrentes dos deslocamentos das extremidades do elemento.

Sendo k_L e u_L , a matriz de rigidez da viga e o vetor que contém os deslocamentos de extremidade respectivamente; combinando-as com (1) ou (3), ter-se-á:

$$f_{etapa2} = X_C k_L u_L \quad (9)$$

para carga concentrada, ou:

$$f_{etapa2} = X_C k_L u_L \quad (10)$$

para carga uniforme total. As grandezas estão expressas no sistema local de referência.

Portanto, as forças internas finais na seção S resultam da soma de ambas as etapas.

$$f_{final} = f_{etapa1} + f_{etapa2} \quad (11)$$

Devido ao uso de matrizes de transferências definidas para duas variáveis, o vetor f_{final} fornecerá as forças em duas seções intermediárias, elegidas. As grandezas estão expressas no sistema local de referência.

3 Cálculo dos deslocamentos em uma seção intermediária de elementos de barra

O arranjo dos elementos das matrizes é tal que o procedimento de cálculo consiste em duas etapas, a saber:

Primeira etapa

Consideram-se os deslocamentos decorrentes das ações diretamente aplicadas ao elemento. Apresentam-se dois tipos de cargas: carga concentrada e carga uniforme total.

A carga concentrada pode ser força ou momento, como mostrado na Figura 2. Para carregamento concentrado, define-se:

$$X_C = \begin{bmatrix} \frac{-x_1}{EA} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{x_1^3}{6EI} & \frac{-x_1^2}{2EI} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{x_1^2}{2EI} & \frac{-x_1}{EI} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-(L-x_2)}{EA} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(L-x_2)^3}{6EI} & \frac{(L-x_2)^2}{2EI} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-(L-x_2)^2}{2EI} & \frac{-(L-x_2)}{EI} \end{bmatrix} \quad (12)$$

onde X_C é a matriz de transferência de deslocamentos para seções ao longo do comprimento do elemento estrutural, tanto à esquerda quanto à direita do local de aplicação da carga concentrada.

Na matriz deve-se observar que $x_1 \leq a$ e que $a \leq x_2 \leq L$. X_C é a matriz que fornece as forças de engastamento perfeito, sendo definida pelas distâncias a e b da Figura 2.

Para a carga uniforme total vista na Figura 3, tem-se:

$$X_U = \begin{bmatrix} \frac{-x_1 L + 2x_1^2}{EAL} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{x_1^3}{6EI} \left(\frac{-x_1}{2L} + 1 \right) - \frac{x_1^2}{2EI} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{x_1^2}{EI} \left(\frac{-x_1}{3L} + \frac{1}{2} \right) - \frac{x_1}{EI} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-(L-x_2)L + 2(L-x_2)^2}{EAL} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(L-x_2)^3}{6EI} \frac{x_2 + L}{2L} - \frac{(L-x_2)^2}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(L-x_2)^2}{EI} - \frac{L-2x_2}{6L} - \frac{(L-x_2)}{EI} \end{bmatrix} \quad (13)$$

X_U é a matriz de transferência de deslocamentos para seções ao longo do comprimento do elemento estrutural.

X_C é a matriz que fornece as forças de engastamento perfeito, conforme a Figura 3.

E , A e I são o módulo de elasticidade do material, a área da seção transversal e o momento de inércia respectivamente.

Dessa maneira, a matriz de transferência da primeira etapa será:

$$T_C = X_C W_C \quad (14)$$

para carga concentrada, ou

$$T_U = X_U W_U \quad (15)$$

para carga uniforme total. As grandezas estão expressas no sistema local de referência.

Os deslocamentos na seção intermediária, pertencentes à primeira etapa serão:

$$u_{etapa1} = T_C \begin{Bmatrix} P_x \\ P_y \\ M_z \end{Bmatrix} \quad (16)$$

para carga concentrada, ou

$$f_{etapa1} = T_U \begin{Bmatrix} q_x \\ q_y \end{Bmatrix} \quad (17)$$

para carga uniforme total. As grandezas estão expressas no sistema local de referência.

Segunda etapa

Consideram-se os deslocamentos decorrentes dos deslocamentos das extremidades do elemento.

São k_L e u_L a matriz de rigidez da viga e o vetor que contém os deslocamentos de extremidade respectivamente; os deslocamentos da seção em relação à tangente à curva elástica relativos à extremidade do elemento são dados por:

$$u_{de} = X_C k_L u_L \quad (18)$$

ou

$$u_{de} = X_U k_L u_L \quad (19)$$

Mais outra parcela a se considerar é a dos deslocamentos devidos ao movimento como corpo rígido da barra, cujo esquema é mostrado na Figura 4.

Sendo:

$$C_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -(L-x_2) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (20)$$

Escreve-se:

$$u_{cr} = C_R u_L \quad (21)$$

onde u_{cr} é o vetor que tem em conta os deslocamentos de corpo rígido.

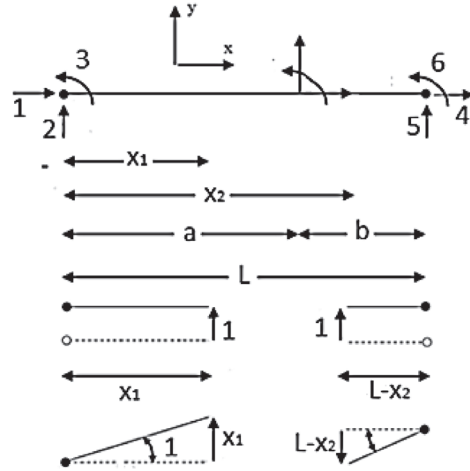


Figura 4 – Deslocamentos de corpo rígido.

Combinando as parcelas (18), (19) e (21) – a matriz de transferência da segunda etapa que leva em conta tanto os deslocamentos devidos aos deslocamentos de extremidade quanto os devidos aos deslocamentos de corpo rígido – ter-se-á:

$$T_C = C_R + X_C k_L \quad (22)$$

para carga concentrada, ou

$$T_U = C_R + X_U k_L \quad (23)$$

para carga uniforme total.

Os deslocamentos na seção intermediária, pertencentes à segunda etapa serão:

$$u_{etapa2} = T_C u_L \quad (24)$$

para a carga concentrada, ou

$$u_{etapa2} = T_U u_L \quad (25)$$

para carga uniforme total.

Todas as grandezas estão expressas no sistema local de referência.

Portanto, os deslocamentos finais na seção intermediária resultam da soma de ambas as etapas.

$$u_{\text{final}} = u_{\text{etapa1}} + u_{\text{etapa2}} \quad (26)$$

Devido ao uso de matrizes de transferências definidas para duas variáveis – no caso da carga concentrada, o vetor u_{final} fornecerá os deslocamentos em duas seções intermediárias elegidas.

4 Aplicação

É realizada a análise de um pórtico plano com dois andares, com vão de 8 m comprimento e 3 m de altura cada nível, como mostrado na Figura 5.

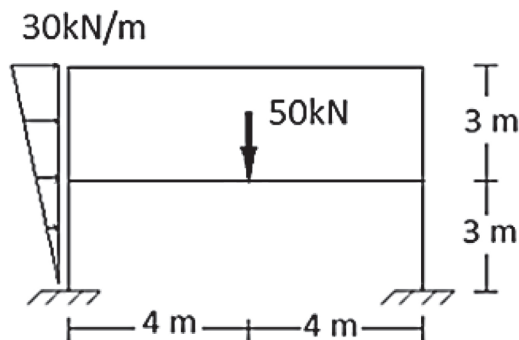


Figura 5 – Pórtico de dois andares.

As seções transversais dos elementos barra são as seguintes:

Colunas: 0,4 x 0,4 metros.

Vigas: 0,3 x 0,9 metros.

O módulo de elasticidade do material E é $2,816 \times 10^7$ kPa. Não se considerará a deformação por força cortante.

O cálculo das reações e dos deslocamentos da estrutura foi realizado por meio do método dos deslocamentos, com a ajuda da ferramenta computacional Mathcad.

A numeração adotada nos nós é a mostrada na Figura 6.

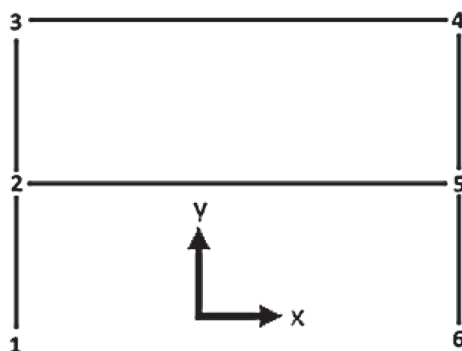


Figura 6 – Numeração nodal.

As direções arbitradas dos graus de liberdade e os nomes das barras se mostram no esquema da Figura 7.

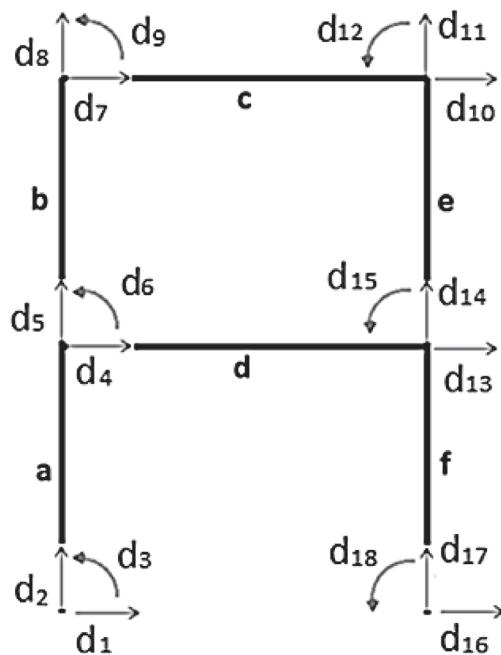


Figura 7 – Direções globais dos deslocamentos e identificação das barras.

Na Tabela 1 mostram-se os valores dos deslocamentos para cada direção, expressos no sistema de referência global da estrutura.

Tabela 1 – Deslocamentos nodais.

Direções (globais)	Deslocamentos	
1	0	m
2	0	m
3	0	rad
4	$1,92 \times 10^{-3}$	m
5	$1,78 \times 10^{-6}$	m
6	$-4,34 \times 10^{-4}$	rad
7	$3,08 \times 10^{-3}$	m
8	$5,61 \times 10^{-6}$	m
9	$1,68 \times 10^{-5}$	rad
10	$3,06 \times 10^{-3}$	m
11	$-3,89 \times 10^{-5}$	m
12	$-1,48 \times 10^{-4}$	rad
13	$1,89 \times 10^{-3}$	m
14	$-3,51 \times 10^{-5}$	m
15	$-3,02 \times 10^{-5}$	rad
16	0	m
17	0	m
18	0	rad

Requer-se calcular as forças e os deslocamentos, nas seções S na viga d a um metro e a cinco metros do nó 2 do pórtico.

5 Solução

Forças internas na seção S.

Inicialmente deve-se ter a matriz de rigidez da barra expressa em coordenadas locais.

Dessa forma a matriz de rigidez k_L é mostrada em seguida.

$$k_L = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \quad (27)$$

onde E , A e I são o módulo de elasticidade do material, a área da seção transversal e o momento de inércia respectivamente.

Logo:

$$k_L = 10^5 \begin{bmatrix} 9,5 & 0 & 0 & -9,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,1 & 0,5 & 0 & -0,1 & 0,5 \\ 0 & 0,5 & 2,6 & 0 & -0,5 & 1,3 \\ -9,5 & 0 & 0 & 9,5 & 0 & 0 \\ 0 & -0,1 & -0,5 & 0 & 0,1 & -0,5 \\ 0 & 0,5 & 1,3 & 0 & -0,5 & 2,6 \end{bmatrix}$$

Para a primeira etapa define-se a matriz X_C para carga concentrada mostrada na equação (1), pois se tem uma carga no meio do vão.

$$X_C = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_2 & -1 \end{bmatrix}$$

Utilizando-se a equação (2), se define a matriz W_C .

$$W_C = \begin{bmatrix} -0,5 & 0 & 0 \\ 0 & -0,5 & 0,188 \\ 0 & -1 & 0,25 \\ -0,5 & 0 & 0 \\ 0 & -0,5 & -0,5 \\ 0 & 1 & 0,25 \end{bmatrix}$$

Calcula-se a matriz de transferência T_C .

$$T_C = X_C W_C$$

Finalmente, obtêm-se as forças da primeira etapa.

$$f_{etapa1} = T_C \begin{Bmatrix} 0 \\ -50 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$f_{etapa1} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -25 \\ 25x_1 - 50 \\ 0 \\ -25 \\ 25x_2 - 150 \end{Bmatrix}$$

Lembra-se que $P_x = 0 \text{ kN}$, $P_y = -50 \text{ kN}$ e $M_z = 0 \text{ kNm}$ para este exemplo.

Na segunda etapa, as forças são calculadas utilizando a equação (9):

$$f_{etapa2} = X_C k_L u_L$$

Sendo os deslocamentos de extremidade do elemento de barra:

$$u_L = \begin{Bmatrix} 1,921 \times 10^{-3} \\ 1,775 \times 10^{-6} \\ -4,343 \times 10^{-4} \\ 1,894 \times 10^{-3} \\ -3,507 \times 10^{-5} \\ -3,021 \times 10^{-5} \end{Bmatrix}$$

O primeiro e o quarto elemento são os deslocamentos em X_{local} em metros, o segundo e o quinto elemento são os deslocamentos em Y_{local} em metros, e o terceiro e o sexto elemento são as rotações em torno de Z_{local} em radianos, conforme a Figura 8.

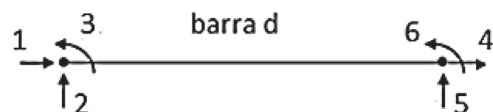


Figura 8 – Direções locais da barra d .

Dessa maneira, as forças da segunda etapa serão:

$$f_{\text{etapa2}} = \begin{pmatrix} -25,41 \\ 21,91 \\ -21,91x_1 + 113,56 \\ 25,41 \\ -21,91 \\ 21,91x_2 - 113,56 \end{pmatrix}$$

Finalmente, utilizando-se a equação (11), obtém-se:

$$f_{\text{final}} = f_{\text{etapa1}} + f_{\text{etapa2}}$$

$$f_{\text{final}} = \begin{pmatrix} -25,41 \\ -3,09 \\ 3,09x_1 + 63,56 \\ 25,41 \\ -46,91 \\ 46,91x_2 - 263,56 \end{pmatrix}$$

O resultado é apresentado no formato de uma função de duas variáveis. O primeiro e o quarto elemento representam a força normal em kN, o segundo e o quinto elemento representam a força cortante em kN e o terceiro e o sexto elemento representam os momentos fletores em kN.m. As três primeiras linhas do vetor fornecem os valores das forças internas no domínio $x_1 \leq a$ e as três últimas linhas fornecem os valores das forças internas em $a \leq x_2 \leq L$.

Avaliando-se a função em $x_1 = 1 \text{ m}$ e $x_2 = 5 \text{ m}$, obtém-se:

$$f_{\text{final}}(1,5) = \begin{pmatrix} -25,41 \\ -3,09 \\ 66,65 \\ 25,41 \\ -46,91 \\ -29,02 \end{pmatrix}$$

Deslocamentos na seção S.

Segundo a equação (12), calcula-se a matriz X_C , como mostrada a continuação:

$$X_C = 10^{-5} \begin{bmatrix} -0,01x_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,03x_1^3 & -0,1x_1^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,1x_1^2 & -0,19x_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,01x_2 + 0,1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0,03(x_2-8)^2 + 0,1(x_2-8) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0,1(x_2-8) & -0,2x_2 - 1,6 \end{bmatrix}$$

Logo:

$$T_{d1} = X_C W_C$$

Dessa maneira os deslocamentos da primeira etapa serão calculados pela equação (16), a saber:

$$u_{\text{etapa1}} = T_{d1} \begin{pmatrix} 0 \\ -50 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= 10^{-5} \begin{pmatrix} 0 \\ 0,8x_1^3 - 4,9x_1^2 \\ -9,7x_1 + 2,4x_1^2 \\ 0 \\ -77,9x_2 + 14,6x_2^2 - 0,8x_2^3 + 103,9 \\ 29,2x_2 - 2,4x_2^2 - 77,9 \end{pmatrix}$$

Lembra-se que $P_x = 0 \text{ kN}$, $P_y = -50 \text{ kN}$ e $M_z = 0 \text{ kNm}$ para este exemplo.

Na segunda etapa devem-se considerar os deslocamentos devidos ao movimento como corpo rígido definidos na equação (20):

$$C_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_2 - 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dessa forma a matriz de transferência da segunda etapa fica:

$$T_{d2} = C_R + X k_L$$

De modo que os deslocamentos da segunda etapa serão então:

$$u_{\text{etapa2}} = T_{d2} u_L$$

$$= 10^{-5} \begin{pmatrix} -0,33x_1 + 192,07 \\ -43,43x_1 + 11,06x_1^2 - 0,71x_1^3 + 0,18 \\ 22,13x_1 - 2,13x_1^2 - 43,43 \\ 0,33x_2 + 186,73 \\ -43,43x_2 + 11,06x_2^2 - 0,71x_2^3 + 0,18 \\ 22,13x_2 - 2,13x_2^2 - 43,43 \end{pmatrix}$$

Finalmente, utilizando-se a equação (26), obtém-se:

$$u_{\text{final}} = u_{\text{etapa1}} = u_{\text{etapa2}}$$

$$= 10^{-5} \begin{Bmatrix} -0,33x_1 + 192,07 \\ -43,43x_1 + 6,19x_1^2 + 0,10x_1^3 + 0,18 \\ 12,38x_1 + 0,30x_1^2 - 43,43 \\ 0,33x_2 + 186,73 \\ -121,37x_2 + 25,68x_2^2 - 1,52x_2^3 + 104,09 \\ 51,35x_2 - 4,57x_2^2 - 121,37 \end{Bmatrix}$$

O primeiro e o quarto elemento são os deslocamentos em X_{local} em m , o segundo e o quinto elemento são os deslocamentos em Y_{local} em m , e o terceiro e o sexto elemento são as rotações em torno de Z_{local} em rad . Avaliando-se a função em $x_1 = 1\text{ m}$ e $x_2 = 5\text{ m}$, obtém-se:

$$u_{\text{final}}(1,5) = \begin{Bmatrix} 1,917 \times 10^{-3} \\ -3,696 \times 10^{-4} \\ -3,075 \times 10^{-4} \\ 1,904 \times 10^{-3} \\ -5,126 \times 10^{-4} \\ 2,115 \times 10^{-4} \end{Bmatrix}$$

Os deslocamentos foram revisados, os comparando com os obtidos pelo programa SALT-UFRJ. Na modelagem no programa, desconsiderou-se a deformação por força cortante.

Para se obter os deslocamentos nesses pontos – na modelagem – criaram-se nós exatamente nos pontos de interesse conforme a Figura 9.

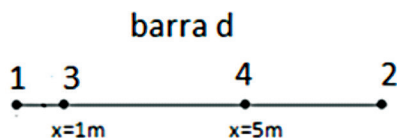


Figura 9 – Nós acrescentados na modelagem no SALT.

Após rodar o programa obtêm-se os deslocamentos nas seções intermediárias em $x_1 = 1\text{ m}$ e $x_2 = 5\text{ m}$ mostrados na Tabela 2.

Os resultados do SALT têm similaridade aos calculados com as matrizes de transferência.

Tabela 2 – Deslocamentos nas seções intermediárias obtidos do SALT.

Nó	Direções (locais)	Deslocamento	
3	Trans x	$1,918 \times 10^{-3}$	m
3	Trans y	$-3,700 \times 10^{-4}$	m
3	Rota z	$-3,070 \times 10^{-4}$	rad
4	Trans x	$1,904 \times 10^{-3}$	m
4	Trans y	$-5,130 \times 10^{-4}$	m
4	Rota z	$2,110 \times 10^{-4}$	rad

6 Conclusões

Este trabalho mostra a utilização de matrizes de transferência como eficiente instrumento para se obter as forças e deslocamentos em seções intermediárias de elementos barra. Isso é uma etapa importante no desenvolvimento de procedimentos automáticos para o traçado de diagramas e deformadas.

Observou-se por meio do exemplo mostrado o cálculo das forças internas em dois pontos do vão e a verificação dos resultados foi realizada no programa de análise de estruturas: SALT-UFRJ.

7 Referências Bibliográficas

- SOUZA LIMA, S., CARVALHO SANTOS, S. **Análise de Estruturas com Computadores**. (em fase de publicação).
- FELTON, L. P., NELSON, R. B. (1997). **Matrix Structural Analysis**. New York: John Wiley & Sons.
- GERE, J. M., WEAVER JR, W. (1976). **Análisis de Estructuras Reticulares**. México DF: Compañía Editorial Continental.
- LIMA SORIANO, H., SOUZA LIMA, S. (2006). **Análise de estruturas: Método das forças e método dos deslocamentos**. Rio de Janeiro: Ciência Moderna.
- MCGUIRRE, W., GALLAGHER, R., ZIEMIAN, R. (2006). **Matrix Structural Analysis**. New York: John Wiley & Sons.
- PRZEMIENIECKI, J. (1985). **Theory of Matrix Structural Analysis**. New York: McGraw-Hill.