

Dimensionamento Ótimo de Blocos sobre Estacas

*Acley Gabriel da Silva Tomaz¹
Élcio Cassimiro Alves²*

Resumo

As fundações têm importância fundamental no comportamento das estruturas. A determinação do tipo de fundação, rasa ou profunda, depende do perfil geotécnico do solo. No caso de fundações profundas o projeto pode ser em estacas ou tubulões, daí a necessidade da concepção de blocos de coroamento em concreto armado. Essa escolha depende da carga do projeto estrutural e das características do solo.

Este trabalho apresenta a formulação para o problema de otimização de blocos sobre estacas com exemplos de aplicação. Como restrições serão impostos os parâmetros definidos pela NBR 6118:2014. Para a resolução do problema de otimização será utilizado o Método dos Pontos Interiores utilizando-se o *software* Matlab.

Palavras-chave: Bloco, Estacas, Otimização.

1 Introdução

O dimensionamento de estruturas de concreto armado busca encontrar uma solução que atenda aos requisitos de resistência, utilização e durabilidade. Dentre as possíveis soluções existe uma solução ótima para cada necessidade como um menor custo, menor peso, menor prazo de execução entre outros. Usualmente o dimensionamento é realizado a partir de uma pré-definição da geometria do elemento, são obtidas as solicitações e verifica-se se a geometria adotada atende a todas as condições estabelecidas. Caso não atenda alguma das condições adota-se uma nova geometria até que todas as condições sejam atendidas. O projetista com sua experiência define se irá manter a solução ou se irá alterá-la em busca de uma melhor solução. Esse processo não garante que a solução encontrada seja a ótima dentre as possíveis. O dimensionamento de bloco sobre estacas está entre os elementos de estrutura de concreto armado que normalmente são dimensionados com esse procedimento.

Os blocos sobre estacas são elementos de volume que têm a finalidade de transmitir as solicitações provenientes do pilar para as estacas. Sua integridade é de extrema importância para a segurança da estrutura como um todo, porém, por serem elementos que ficam abaixo do nível do solo geralmente não permitem uma inspeção visual regular.

No Brasil utilizam-se dois modelos de cálculo para bloco rígido sobre estacas: o método das Bielas (BLÉVOT, 1967) e o método do CEB-FIP (1970).

1.1 Método das Bielas

O Método das Bielas para blocos de coroamento é baseado nos ensaios de BLÉVOT e FRÉMY (1967), e consiste em se admitir uma treliça espacial no interior do bloco composta por barras tracionadas e comprimidas, unidas por meio de nós.

Com um modelo de treliça isostática as forças das bielas e tirantes são calculadas por meio do equilíbrio entre forças internas e externas; as forças de compressão nas bielas são resistidas pelo concreto, as de tração que atuam nas barras horizontais da treliça pela armadura.

O método consiste no cálculo da força de tração, que define a área necessária de armadura, e na verificação das tensões de compressão nas bielas, calculadas nas seções situadas junto ao pilar e às estacas.

As tensões limites foram determinadas experimentalmente por BLÉVOT (1967). O método das bielas e tirantes é recomendado para ações centradas, e todas as estacas devem estar igualmente afastadas do centro do pilar. Pode ser empregado no caso de ações que não são centradas, desde que se admita que todas as estacas comprimidas estão submetidas à maior força transferida (OLIVEIRA, 2009).

1 Aluno do Mestrado em Engenharia Civil, Universidade Federal do Espírito Santo.

2 Professor Doutor, Departamento de Engenharia Civil da Universidade Federal do Espírito Santo. Av. Fernando Ferrari, 574 – Goiabeiras – Vitória – ES.

1.2 Método do CEB-FIP (1970)

O projeto de blocos sobre estacas considerando-se o processo do CEB-FIP (1970) indica verificações de segurança para tensões normais e tangenciais, com solicitações determinadas em seções transversais particulares. A rotina é aplicada a blocos considerados rígidos, com distância entre a face do pilar até o eixo da estaca mais afastada, variando entre um terço e a metade da altura do bloco.

Para o dimensionamento da armadura principal do bloco o método sugere uma verificação à flexão considerando-se uma seção de referência interna plana, normal à superfície do bloco. Essa seção está situada entre as faces do pilar a uma distância de $0,15 a_p$, onde a_p designa a medida do lado do pilar no sentido perpendicular à seção considerada.

Para a verificação da resistência à força cortante defini-se uma seção de referência distante da face do pilar de um comprimento igual à metade da altura do bloco, e no caso de blocos sobre estacas vizinhas ao pilar, em que algumas estacas ficam situadas a uma distância da face do pilar inferior a metade da altura útil do bloco, a seção é considerada na própria face. A força de referência é igual a componente normal à superfície de apoio da resultante das forças aplicadas sobre uma ou outra das partes do bloco limitadas pela seção de referência (MUNHOZ, 2004).

1.3 NBR 6118:2014 – Bloco sobre estacas

De acordo com a NBR 6118:2014 blocos são estruturas de volume usadas para transmitir às estacas e aos tubulões as cargas de fundação, podendo ser considerados rígidos ou flexíveis.

Quando se verifica a expressão a seguir, nas duas direções, o bloco é considerado rígido. Caso contrário o bloco é considerado flexível:

$$h \geq \frac{(a - a_p)}{3} \quad (1)$$

onde

- h – altura do bloco;
- a – dimensão do bloco em uma determinada direção;
- a_p – dimensão do pilar na mesma direção;

O comportamento estrutural do bloco rígido se caracteriza por:

- a) ação da flexão nas duas direções, mas com trações essencialmente concentradas nas linhas das estacas;
- b) forças transmitidas do pilar para estacas

essencialmente por bielas de compressão, de forma e dimensões complexas;

- c) ação por cisalhamento também em duas direções, não apresentando ruínas por tração diagonal, e sim por compressão das bielas.

Para o dimensionamento dos blocos são aceitos modelos tridimensionais, lineares ou não lineares, e modelos biela-tirante tridimensionais.

O bloco deve ter altura suficiente para permitir a ancoragem da armadura de arranque dos pilares.

2 Dimensionamento de blocos sobre estacas (Método das Bielas)

2.1 Bloco sobre duas estacas

A Figura 1 apresenta o esquema de cálculo de um bloco sobre duas estacas, bem como a sequência lógica para a verificação dos termos que influenciam o seu dimensionamento, e limitações impostas por norma.

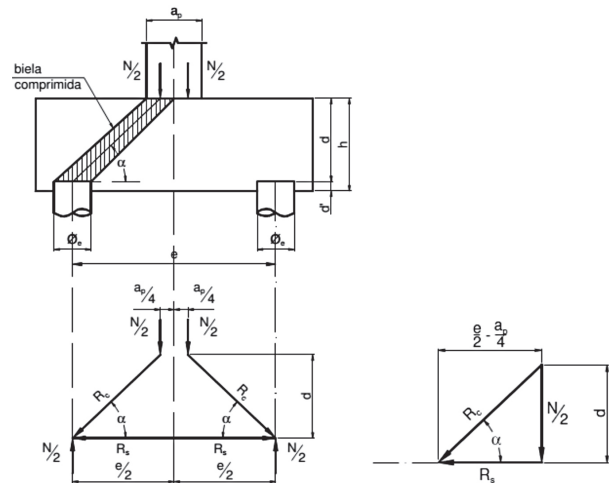


Figura 1 – Bloco sobre duas estacas: esquema de forças.

Área de aço:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{N}{R_s} \text{ e } \operatorname{tg} \alpha = \frac{d}{\frac{e}{2} - \frac{a_p}{4}} \Rightarrow R_s = \frac{N}{8} \cdot \frac{(2e - a_p)}{d} \quad (2)$$

$$A_s = \frac{R_s d}{f_{yd}}$$

Verificação da biela:

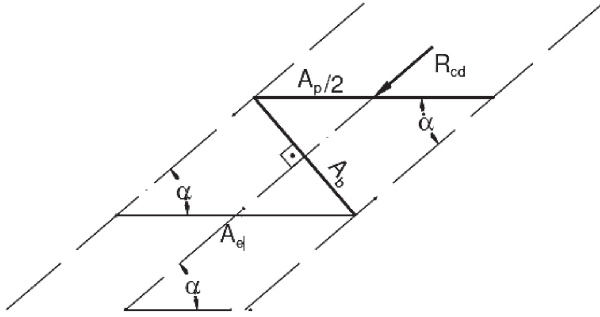


Figura 2 – Área da biela A_b de concreto comprimido.

No pilar:

$$A_b = \frac{A_p}{2} \cdot \text{sen} \alpha \quad (3)$$

Na estaca:

$$A_b = A_e \cdot \text{sen} \alpha \quad (4)$$

onde

A_b – área da biela;

A_p – área do pilar;

A_e – área da estaca

Tensão na biela (pilar):

$$\sigma_{cd,b,pil} = \frac{N_d}{A_p \cdot \text{sen}^2 \alpha} \quad (5)$$

Tensão na biela (estaca):

$$\sigma_{cd,b,est} = \frac{N_d}{2 \cdot A_e \cdot \text{sen}^2 \alpha} \quad (6)$$

Tensões limites das bielas comprimidas (MUNHOZ, 2004):

$$\sigma_{cd,b,lim,pil} = 1,4 f_{cd} \quad (\text{pilar})$$

$$\sigma_{cd,b,lim,est} = 0,85 f_{cd} \quad (\text{estaca})$$

2.2 Bloco sobre três estacas

Por geometria para bloco de três estacas tem-se:

$$R_s = \frac{N}{9} \cdot \frac{(e\sqrt{3} - 0,9 \cdot a_p)}{d} \quad (7)$$

$$A_s = \frac{R_s d}{f_{yd}} \quad (\text{armadura principal})$$

A tensão na biela (pilar) é similar à do bloco de duas estacas.

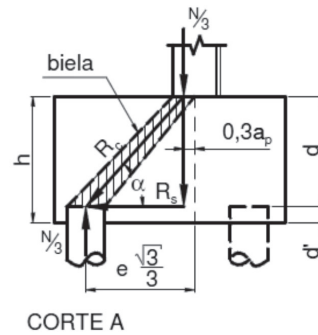
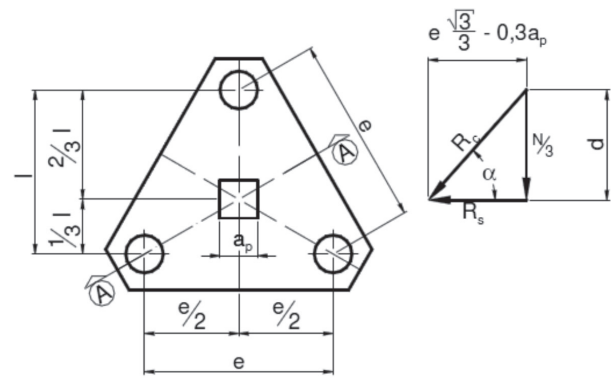


Figura 3 – Bloco sobre três estacas: esquema de forças.

Tensão na biela (estaca):

$$\sigma_{cd,b,est} = \frac{N_d}{3 \cdot A_e \cdot \text{sen}^2 \alpha} \quad (8)$$

Tensões limites das bielas comprimidas (MUNHOZ, 2004):

$$\sigma_{cd,b,lim,pil} = 1,75 f_{cd} \quad (\text{pilar}) \quad (9)$$

$$\sigma_{cd,b,lim,est} = 0,85f_{cd} \quad (\text{estaca}) \quad (10)$$

2.3 Bloco sobre quatro estacas

Por geometria para bloco de quatro estacas tem-se:

$$R_s = \frac{N \cdot \sqrt{12}}{16} \cdot \frac{(2e - a_p)}{d} \quad (11)$$

para pilar retangular substituir a_p por $a_{p,eq} = \sqrt{a_p \cdot b_p}$

e para a armadura principal tem-se

$$A_s = \frac{R_s d}{f_{yd}}$$

Tensão na biela (pilar) similar ao bloco de duas estacas (Expressão 6).

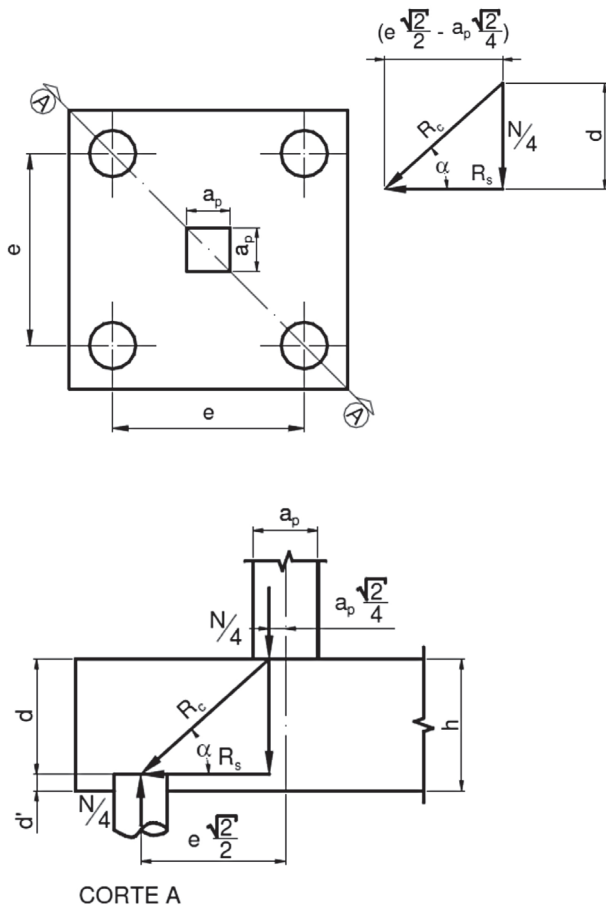


Figura 4 – Bloco sobre quatro estacas: esquema de forças.

Tensão na biela (estaca):

$$\sigma_{cd,b,est} = \frac{N d}{4 \cdot A_e \cdot \text{sen}^2 \alpha} \quad (12)$$

Tensões limites das bielas comprimidas (MUNHOZ, 2004):

$$\sigma_{cd,b,lim,pil} = 2,1f_{cd} \quad (\text{pilar})$$

$$\sigma_{cd,b,lim,est} = 0,85f_{cd} \quad (\text{estaca})$$

3 Otimização

Entende-se como problema de otimização aquele no qual se procura maximizar ou minimizar uma função numérica com certo número de variáveis, sujeitas a certo conjunto de condições que restringem o espaço das soluções do problema (LIMA, 2007).

Em problemas de engenharia o processo convencional é partir de uma pré-definição da geometria do elemento, obter as solicitações e verificar se a geometria adotada atende à todas condições estabelecidas. Caso não atenda alguma das condições adota-se uma nova geometria até que todas as condições sejam atendidas. A seguir projetista com sua experiência define se irá manter a solução, ou se irá alterar em busca de uma solução melhor. Esse processo não garante que a solução ótima foi encontrada.

O projeto ótimo consiste na determinação sucessiva de configurações do elemento, no qual a nova solução é obtida a partir da anterior com o uso de técnicas matemáticas. Assim cada configuração é resultado de alterações no conjunto das variáveis de projeto, e a solução ótima é a finalização ideal desse processo. A Figura 5 mostra uma representação sistemática do projeto ótimo.

Existem diversos métodos para encontrar a solução ótima de um determinado problema, dependendo das variáveis que estão sendo consideradas, do tipo de restrições e das características do problema em si. Destacam-se duas linhas dos processos de otimização, os heurísticos e a programação matemática.

Seja qual for o método a ser utilizado um problema de otimização tem:

- a) um conjunto de variáveis que são alteradas em busca da solução ótima;
- b) uma função objetivo;
- c) um conjunto de restrições a serem respeitadas.

De acordo com as equações das restrições e função objetivo é determinado o possível método a ser utilizado. Problemas de otimização com equações lineares podem ser resolvidos com métodos mais simples como o “Simplex”. Os problemas onde as equações não são lineares exigem técnicas mais complexas, como por exemplo o método dos pontos interiores.

Para o problema de bloco de fundações existem restrições não lineares, o que proporcionou a escolha do método dos Pontos Interiores neste trabalho.

3.1 Método dos Pontos Interiores

O método dos Pontos Interiores tem como característica gerar uma sequência de pontos no interior da região viável que converge para a solução do problema. Uma vantagem desse método é que cada um dos pontos intermediários tem valores decrescentes da função objetivo, ou seja, se por algum motivo a convergência não for alcançada o ponto final é sempre viável.

A partir de um projeto inicial x^0 define-se um ponto no espaço vetorial R^m . A partir desse ponto, o algoritmo gera uma sequência de configurações. No limite o ponto de acumulação satisfaz as condições de otimalidade de Karush Kuhn Tucker.

A configuração x^{k+1} é obtida calculando-se

uma direção de busca d^k , na qual o ponto x^k pode se mover. Faz-se então uma busca linear nesta direção d^k e encontra-se um passo α , que define o quanto o ponto x^k vai se deslocar na direção d^k até o ponto x^{k+1} . Dessa forma o processo iterativo prosseguirá até que sejam satisfeitos os critérios de convergência (AMARAL, 2004).

O algoritmo baseia-se na aplicação do método de Newton para a solução do sistema de equações não-lineares obtidas a partir da aplicação das condições de Kuhn-Tucker do problema de otimização (HERSKOVITZ, 1995).

Considere o problema de otimização:

$$\begin{aligned} &\text{minimizar } f_x \\ &\text{sujeito a } c_i(x) \leq 0 \quad i = 1 \dots m \end{aligned}$$

Para esse problema as condições de Kuhn-Tucker são:

$$g + \sum_{i=1}^m \lambda_i a_i = 0 \tag{13}$$

$$\lambda_i^* c_i(x^*) = 0 \tag{14}$$

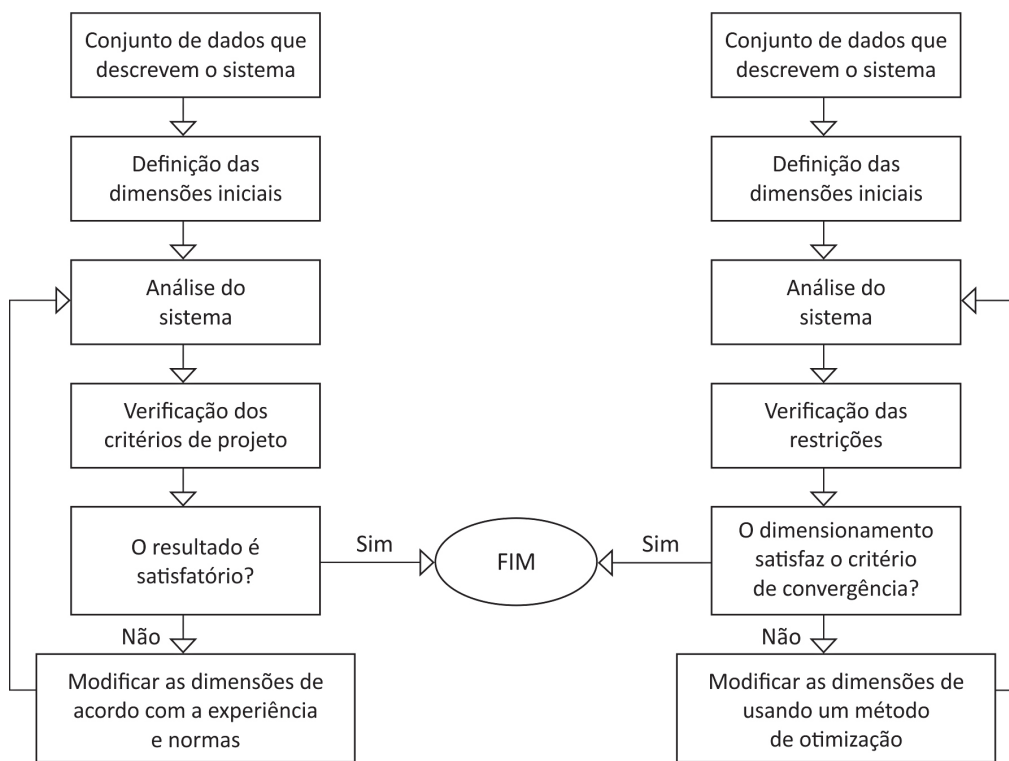


Figura 5 – Comparação esquemático entre o procedimento: (a) convencional de projeto; (b) projeto ótimo. (ALMEIDA, 2001).

$$c_i(x^*) \leq 0 \quad (15)$$

$$\lambda_i^* \geq 0 \quad (16)$$

Sendo A a matriz dos gradientes das restrições e C uma matriz diagonal contendo os valores das restrições, as duas primeiras equações podem ser escritas como:

$$g + A^t \lambda = 0 \quad (17)$$

$$C \lambda = 0 \quad (18)$$

Aplicando-se o método de Newton para resolver o problema das equações 13 a 16, obtém-se o sistema:

$$\begin{bmatrix} W & A^t \\ \Lambda A & C \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_0 \\ \lambda_0 \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} g \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (19)$$

Na Equação 17 Λ é uma matriz diagonal para a qual $\Lambda_{ii} = \lambda_i$, d_0 é a direção de busca do λ_0 é a estimativa dos multiplicadores de Lagrange. Pode-se demonstrar que d_0 é uma direção de decréscimo de f e que $d_0 = 0$ se x for um ponto estacionários (PARENTE, 2000).

A direção na busca fornecida pelo sistema da expressão 19 nem sempre é uma direção viável. Expandindo-se uma equação da parte inferior do sistema, chega-se a:

$$\lambda_i a_i^t d_0 + c_i \lambda_{oi} = 0 \quad (20)$$

Essa equação implica que $a_i^t d_0 = 0$ para todo i tal que $C_i = 0$. Geometricamente isso significa que d_0 é tangente às restrições ativas, indicando que a direção aponta para fora da região viável.

Uma solução para evitar esse efeito é adicionar uma constante negativa do lado direito da equação 20:

$$\lambda_i a_i^t d + c_i \bar{\lambda}_i = -\rho \lambda_i \quad (21)$$

onde $\bar{\lambda}_i$ é a nova estimativa de λ_i .

Esse procedimento faz com que a direção original seja defletida, de um valor proporcional a ρ , para o interior da região viável. Como a flecha é proporcional a ρ , e d_0 é uma direção de decréscimo de f , é possível encontrar limites em ρ para que d também seja uma direção de decréscimo. Esse objetivo pode ser atingido impondo-se que:

$$g^t d \leq k_a g^t d_0 \quad (22)$$

Para $k_a \in (0; 1)$. Em geral, a taxa de decréscimo de f ao longo de d é menor que ao longo de d_0 . No entanto esse é o óbice para se obter uma direção de decréscimo viável.

Considerando-se o sistema auxiliar:

$$\begin{bmatrix} W & A^t \\ \Lambda A & C \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ \lambda_1 \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} g \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (23)$$

mostra-se

$$d = d_0 + \rho d_1 \quad (24)$$

e

$$\bar{\lambda} = \lambda_0 + \rho d_1 \quad (25)$$

Substituindo-se a expressão 24 na expressão 25 tem-se:

$$\rho \leq (k_a - 1) \frac{g^t d_0}{g^t d_1} \quad (26)$$

Definida a direção de busca d , é necessário realizar uma busca linear restrita ao longo dessa direção, de forma a garantir que o ponto gerado esteja no interior da região viável. Além disso é necessário atualizar os valores dos multiplicadores de Lagrange de maneira a assegurar a convergência para a solução correta (PEREIRA, 2002).

Esse método está implementado no pacote de funções do Matlab onde segue a seguinte formulação:

$$\min f(x) \text{ tal que } \begin{cases} c(x) \leq 0 \\ ceq(x) = 0 \\ A \cdot x \leq b \\ Aeq \cdot x = beq \\ lb \leq x \leq ub, \end{cases}$$

onde

x – vetor das variáveis do problema;

b – vetor resposta do sistema de inequações lineares;

beq – vetor resposta do sistema de equações lineares;

lb e ub – vetores de limite superiores e inferiores do vetor das variáveis;

A – a matriz do sistema de inequações lineares;

$c(x)$ – vetor que contém as inequações não lineares do problema;

$ceq(x)$ – vetor que contém as equações não lineares do problema;

$f(x)$ – função objetivo do problema;

x_0 – vetor com uma solução inicial viável do problema.

3.2 Formulação para otimização de blocos sobre estacas

Utilizando-se o método das bielas para o dimensionamento de blocos sobre estacas, e adequando-o para a formulação de problema de otimização tem-se a sistemática seguinte.

Variáveis do problema:

x_1 – altura útil do bloco D

x_2 – área de aço principal A_s

Função objetivo (minimizar):

$$f(x) = Vb \cdot pc + Af \cdot pf + As \cdot \gamma a \cdot pa \quad (\text{custo do bloco}) \quad (27)$$

Restrições:

$$\begin{cases} c(1) = h - \frac{A - a}{3} \\ c(2) = 45^\circ - \theta \\ c(3) = \theta - 55^\circ \\ c(4) = \sigma_{cd,b,pil} - \sigma_{cd,b,lim,pil} \\ c(5) = \sigma_{cd,b,est} - \sigma_{cd,b,lim,est} \\ ceq(1) = A_s - \frac{R_{sd}}{f_{yd}} \end{cases}$$

onde

Vb – volume do bloco

pc – preço por metro cúbico do concreto

Af – área de forma do bloco

pf – preço por metro quadrado da forma

γa – peso específico do aço

pa – preço por quilo do aço

4 Exemplos

Os exemplos a seguir foram obtidos em projetos estruturais fornecidos pela Projest Engenharia de blocos sobre estacas de uma obra industrial construída em 2008.

Os dados gerais dos problemas analisados estão mostrados a seguir.

Resistência dos materiais:

- $f_{ck} = 30$ MPa.
- $f_{yk} = 500$ MPa.

Custo dos materiais (valores obtidos da tabela SINAPI da Caixa Econômica Federal, para o mês de Abril/2014, referente à cidade de Vitória – ES):

- custo do concreto 30 MPa: R\$345,30/m³ pc ;
- custo do aço: R\$ 7,81/Kg pa ;
- custo da forma: R\$ 51,37/m² pf .

Bloco sobre duas estacas

Dados do problema:

- diâmetro da estaca de = 50 cm;
- distância entre estacas $e = 130$ cm;
- largura do bloco em x $A = 210$ cm;
- largura do bloco em y $B = 80$ cm;
- largura do pilar em x $a = 45$ cm;
- largura do pilar em y $b = 45$ cm;
- carregamento Vertical $P = 244$ tf.

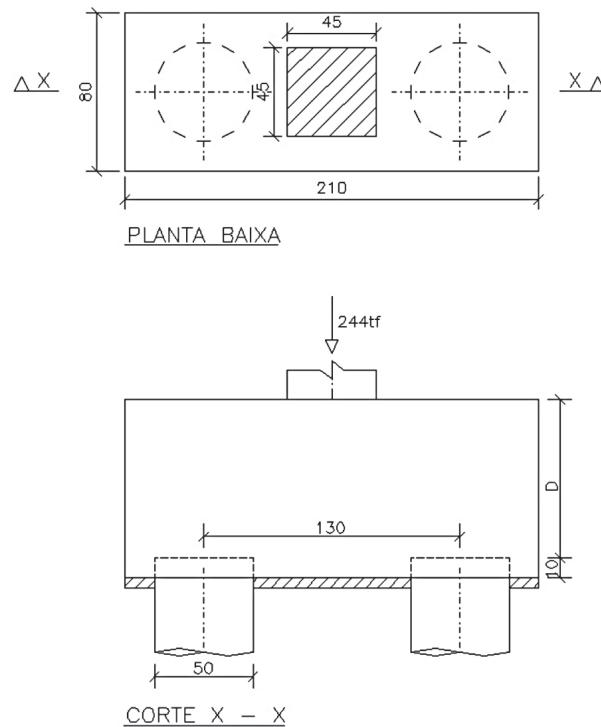


Figura 6 – Bloco de duas estacas: geometria e cargas.

Solução pelo procedimento convencional

Foi adotado uma altura inicial de $h = 80$ cm (70 + 10) de acordo com experiência do calculista e após as verificações do elemento foi mantida a altura inicial.

Solução pelo método dos pontos interiores utilizando o software Matlab

Foi fornecida uma solução inicial de partida, a função objetivo (custo) e as restrições. Após o processamento do programa obteve-se os resultados mostrados na Tabela 1.

Bloco sobre três estacas

Dados do problema:

- diâmetro da estaca de = 50 cm;
- distância entre estacas $e = 130$ cm;
- distância face estaca até face do bloco $c = 15$ cm;
- largura do pilar em x $a = 55$ cm;
- largura do pilar em y $b = 55$ cm;
- carregamento vertical $P = 360$ tf.

Os resultados estão mostrados na Tabela 2.

Tabela 1 – Resultados do exemplo de bloco sobre duas estacas.

	Convencional	Solução Ótima	Diferença	Restrições
h (cm)	80,0	67,5	18,5%	$h \geq 55$ cm
θ	52,5°	46,9°	11,9%	$45^\circ \leq \theta \leq 55^\circ$
$\sigma_{cb,b,pil}$ (MPa)	19,1	22,6	-15,5%	$\sigma_{cd,b,lim,pil} = 37,5$
$\sigma_{cb,b,est}$ (MPa)	9,8	11,6	-15,5%	$\sigma_{cb,b,lim,est} = 18,2$
As (cm ²)	24,8	28,9	-14,2%	–
CUSTO (R\$)	1412,80	1392,70	1,4%	–

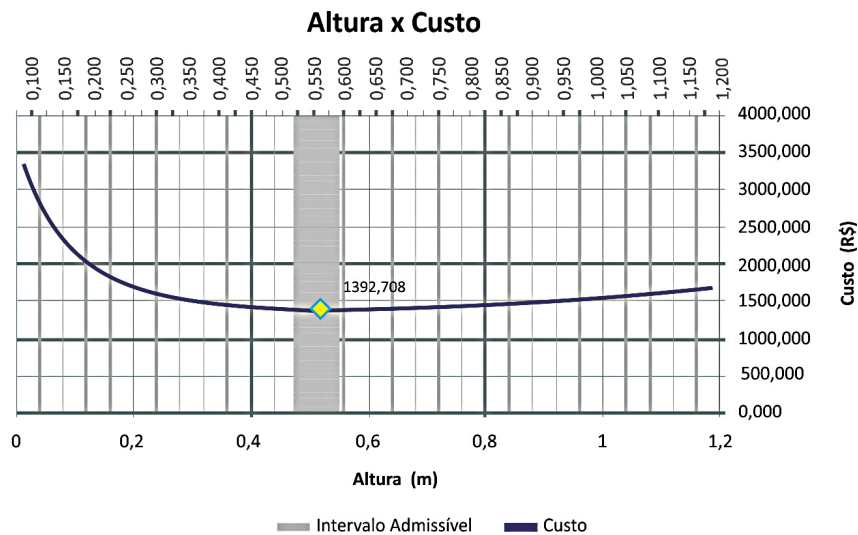


Figura 7 – Gráfico custo X altura.

Tabela 2 – Resultados do exemplo de bloco sobre três estacas.

	Convencional	Solução Ótima	Diferença	Restrições
h (cm)	90,0	65	38,5%	$h \geq 55$ cm
θ	58,0°	47,7°	11,9%	$45^\circ \leq \theta \leq 55^\circ$
$\sigma_{cb,b,pil}$ (MPa)	17,4	22,8	-23,7%	$\sigma_{cd,b,lim,pil} = 37,5$
$\sigma_{cb,b,est}$ (MPa)	7,9	10,4	-24,0%	$\sigma_{cb,b,lim,est} = 18,2$
As (cm ²)	16,2	23,5	-31,1%	–
CUSTO (R\$)	3162,80	3023,90	4,6%	–

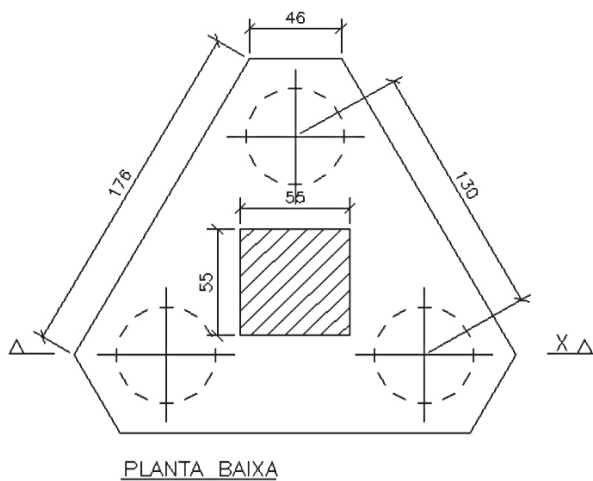


Figura 7 – Bloco de três estacas: geometria e cargas.

Bloco sobre quatro estacas

Dados do problema:

- diâmetro da estaca de = 50 cm;
- distância entre estacas e = 130 cm;
- largura do bloco em x A = 210 cm;
- largura do bloco em y B = 210 cm;
- largura do pilar em x a = 60 cm;
- largura do pilar em y b = 60 cm;
- carregamento vertical P = 450 tf.

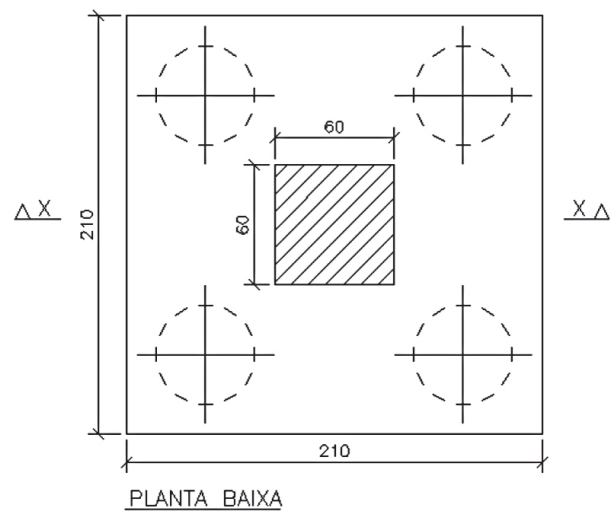


Figura 8 – Bloco de quatro estacas: geometria e cargas.

Os resultados obtidos estão mostrados na Tabela 3.

O método dos pontos interiores foi eficiente na busca do bloco com um custo mínimo dentre as soluções possíveis para os exemplos analisados. No caso do bloco onde o volume de concreto é grande, faz-se diferença na redução nas dimensões do bloco, mesmo tendo-se

Tabela 3 – Resultados do exemplo de bloco sobre quatro estacas.

	Convencional	Solução Ótima	Diferença	Restrições
h (cm)	90,0	65	38,5%	$h \geq 55 \text{ cm}$
θ	58,0°	47,7°	11,9%	$45^\circ \leq \theta \leq 55^\circ$
$\sigma_{cb,b,pil}$ (MPa)	17,4	22,8	-23,7%	$\sigma_{cd,b,lim,pil} = 37,5$
$\sigma_{cb,b,est}$ (MPa)	7,9	10,4	-24,0%	$\sigma_{cb,b,lim,est} = 18,2$
As (cm ²)	16,2	23,5	-31,1%	–
CUSTO (R\$)	3162,80	3023,90	4,6%	–

que aumentar a taxa de armadura. Nessa situação o modelo com a formulação de otimização torna-se viável para uma solução automática do problema.

Busca-se a partir desses exemplos estudar e desenvolver um modelo de bielas e tirantes tridimensional para análise generalizada de bloco sobre um número qualquer de estacas.

6 Referências

- AMARAL, E. C. (2004). **Otimização de forma para problemas de estado plano utilizando o método dos elementos de contorno**. Dissertação (Mestrado). UENF, Campos dos Goytacazes, RJ.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6118:2014** – Projeto de estruturas de concreto. Rio de Janeiro.
- COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BÉTON. **CEB-FIP Model Code 1990**. London, Thomas Telford, 1993.
- LIMA, B. S. (2007). **Otimização de fundações estacadas**. Dissertação (Mestrado) – Universidade de Brasília Faculdade de Tecnologia.
- MUNHOZ, F. S. (2004). **Análise do comportamento de blocos de concreto armado sobre estacas submetidos à ação de força centrada**. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- OLIVEIRA, L. M. (2009). **Diretrizes para projetos de blocos de concreto armado sobre estacas**. Dissertação (Mestrado) – Escola Politécnica da Universidade de São Paulo.
- SIAS, F. M. (2014). **Dimensionamento Ótimo de Pilares de concreto armado**. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Espírito Santo. Vitória, ES.
- HERSKOVITS, J. (1995). **A View on Nonlinear Optimization**, Advances in Structural Optimization.
- PROBST, R. W.; OLIVEIRA, A. R. (2013). **Métodos de pontos interiores aplicados ao problema de pré-despacho de um sistema hidrotérmico**. Revista Eletrônica de Pesquisa Operacional para Desenvolvimento, Rio de Janeiro, v. 5, p. 14-30.
- PARENTE JR, E. C. (2000) **Análise de Sensibilidade e Otimização de Forma de Estruturas Geometricamente Não-Lineares**. Tese de Doutorado. PUC, Rio de Janeiro.
- PEREIRA, A. (2002). **Projeto ótimo de pórticos planos com restrição à flambagem**. Dissertação (Mestrado). PUC, Rio de Janeiro.