

# Dimensionamento Ótimo de Pilares de Concreto Armado Segundo a NBR 6118:2014

*Francesco Mayer Sias<sup>1</sup>  
Élcio Cassimiro Alves<sup>2</sup>*

## Resumo

A área da engenharia responsável pelo dimensionamento de estruturas busca soluções para atender a vários parâmetros simultâneos como estética, custo, qualidade, peso entre outros. Por isto os processos de otimização se fazem necessários nesta área. O presente trabalho tem como objetivo elaborar um estudo sobre esses processos aplicados ao dimensionamento de pilares de concreto, com seção transversal retangular, que atenda às prescrições da NBR 6118:2014. Exemplos numéricos de pilares são apresentados de acordo com os tipos de solicitações e restrições, para que se possa desenvolver um algoritmo de análise desses elementos. Para o desenvolvimento do problema utilizou-se como base o software Matlab, tendo em vista a existência de algoritmos de otimização implementados em seu pacote de modo a realizar um dimensionamento ótimo. Os exemplos apresentados com a utilização do software permitem obter a seção transversal mais econômica possível, ou seja, seção ótima, capaz de suportar as solicitações.

**Palavras-chave:** Pilares, Otimização, Matlab.

## 1 Introdução

O dimensionamento de estruturas, em geral, e nesse caso as de concreto armado, se dá usualmente por meio de processos iterativos a partir de uma geometria pré-definida pelo projetista. Baseado na sua experiência obtém-se um projeto inicial das seções de concreto e aço. Em seguida são realizadas as verificações de resistência e comparadas com as solicitações atuantes para decidir se uma nova tentativa deve ser realizada, com a finalidade de redução dos custos do projeto, ou se o resultado encontrado já é satisfatório. Esse processo é realizado sucessivamente pelo próprio executor até que julgue ter encontrado a melhor solução dentre as já testadas. Com isso o tempo de projeto se torna muito longo, além de não ser possível a garantia de que o dimensionamento ótimo tenha sido realizado uma vez que não foi feita uma análise sistemática do problema.

Levando-se em conta as quantidades de variáveis relacionadas ao processo de dimensionamento, dificilmente a melhor solução para o projeto será encontrada dessa forma sem que seja elaborado um estudo detalhado da situação. Para tanto deveria se obter uma expressão que relacionasse como cada variável

de projeto influencia no objetivo que se pretende melhorar no projeto, que normalmente é o seu custo final deste. Analisando-se esse enfoque em função dessas variáveis, seria possível comparar os projetos entre si e então, a partir de estudos, caminhar-se-ia para o projeto mais adequado a cada situação.

É nesse sentido que entra a pesquisa de técnicas de otimização aliadas à programação computacional para resolver os problemas relacionados ao dimensionamento estrutural. Essa técnica é trabalhada por meio de uma função objetivo em que se pretende encontrar a solução ótima (como o custo, o peso, a área da seção transversal, ou qualquer outro parâmetro desejado), podendo as variáveis relacionadas a uma função terem restrições ou não. A otimização pode ser aplicada em várias situações ou problemas que se deseja melhorar e obter o desempenho máximo. Por isso esses métodos aplicados ao dimensionamento de estruturas também são válidos e trazem benefício comprovado na busca de melhores resultados.

Existem diferentes técnicas para se encontrar a solução ótima de um determinado problema, dependendo das variáveis que estão sendo estudadas, do tipo de restrições e das características do problema

1 Mestre em Engenharia de Estruturas – Universidade Federal do Espírito Santo.

2 Professor Doutor do Departamento de Engenharia Civil – Universidade Federal de Espírito Santo.  
Av. Fernando Ferrari, 514, Goiabeiras, CEP 29075-910, Vitória, ES, Brasil.

em si. Pode-se destacar basicamente duas vertentes dos processos de otimização conhecidos atualmente. São eles: os métodos heurísticos e a programação matemática.

A utilização da programação matemática é muitas vezes impraticável pelo fato de ser muito difícil a aplicação das condições necessárias, que utilizam técnicas de derivação, para se encontrar a solução ótima, principalmente nas funções não lineares, que são muito presentes no dimensionamento estrutural. Dessa forma VIANNA (2003) destaca que foram criados alguns métodos de programação para serem aplicados na otimização com a finalidade facilitar sua utilização, especificamente nos casos de programação não linear.

Por sua vez os métodos heurísticos consistem em técnicas probabilísticas de procura da solução ideal com base nos princípios da genética de sobrevivência dos indivíduos mais adaptados à situação desejada. Dentre esses métodos, vale destacar o método dos Algoritmos Genéticos, que tem sido bastante utilizado em trabalhos acadêmicos recentes sobre otimização estrutural, já que não tem restrições quanto ao tipo de função, se ela é ou não derivável, linear ou não linear, contínua ou não, entre outras características.

### 1.1 Justificativa

A literatura ainda carece de estudos que aprofundem o tema de otimização de pilares de concreto armado que tratem de casos mais sofisticados utilizados na atualidade.

Alguns trabalhos de otimização de pilares como VIANNA (2003), ARGOLO (2000), BASTOS (2004), CHAVES (2008), RODRIGUES JÚNIOR (2005) entre outros, trazem simplificações nos modelos de pilares estudados como limitações nos índices de esbeltez dos elementos, ou restrições nos valores da seção geométrica com o objetivo de reduzir o número de equações e facilitar o dimensionamento e por consequência a otimização. Mas, também limitam a sua utilização, o que não é desejável.

Dessa forma é possível concluir que este trabalho poderá contribuir para o dimensionamento de pilares de concreto armado de forma que possam ser dimensionados elementos com menores custos possíveis.

## 2 Dimensionamento de Pilares de Concreto

Será abordado de forma sucinta neste artigo sobre como a NBR 6118:2014 e alguns autores como CARVALHO e PINHEIRO (2009), FUSCO (1995) entre outros, tratam do dimensionamento de estrutu-

ras de concreto armado, em especial de pilares, no sentido de explicar conceitos e hipóteses e metodologias utilizadas no dimensionamento.

### 2.2 Hipóteses aceitas no dimensionamento

Ao dimensionar os elementos sujeitos a flexo-compressão são aceitas algumas hipóteses básicas tratadas pela NBR 6118:2014 para poder validar toda a metodologia de cálculo que será abordada em seguida:

- as seções planas permanecem planas após aplicação das tensões normais até o estado limite último (ELU). Essa hipótese tem a restrição de que a relação entre os pontos onde o momento fletor se anula e a altura considerada útil da seção transversal não pode ser maior que dois;
- o aço e o concreto deformam-se do mesmo modo, ou seja, sua deformação específica é idêntica. Para tanto se deve admitir que a aderência entre estes materiais seja completa;
- as tensões de tração na qual o concreto está submetido podem ser desprezadas já que têm valores muito pequenos e estando o material sujeito a fissuração, essa resistência será muito prejudicada.

### 2.3 Domínios do E.L.U.

A NBR 6118:2014 também define o estado de ruptura como de dois possíveis tipos. A ruptura convencional por deformação específica plástica excessiva (do aço) e a ruptura por encurtamento limite do concreto. Esses estados são tais que a condição deformação específica na seção do elemento considerado esteja em uma das condições (A, B ou C) do gráfico da Figura 1 apresentado no escopo da referida norma. Conforme pode-se perceber na Figura 1, o esquema ainda subdivide os estados limite últimos em oito domínios – reta a, domínios 1, 2, 3, 4, 4a, 5 e reta b – de acordo com seu estado de deformação específica.

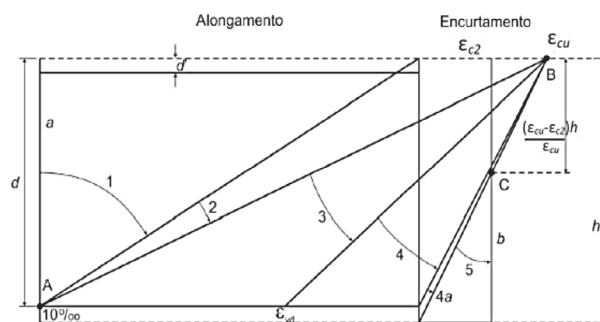
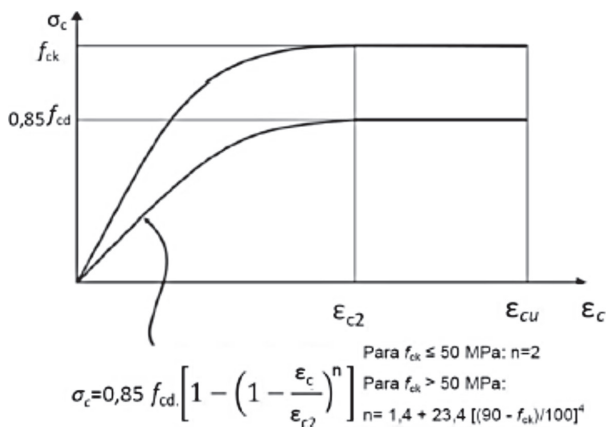


Figura 1 – Domínios de estado limite último de uma seção transversal (NBR 6118, 2014).

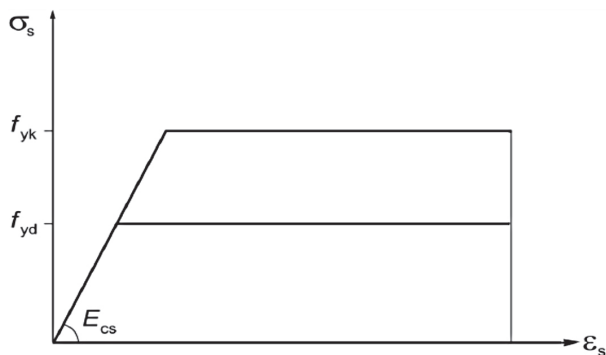
## 2.4 Diagramas tensão x deformação específica no E.L.U.

Para o estado limite ultimo do concreto recomenda-se a utilização do diagrama parábola-retângulo na distribuição de tensões do concreto como mostra a Figura 2, onde  $f_{cd}$  é o valor de cálculo da resistência do concreto descrito na norma.

Para o estado limite último do aço a NBR 6118:2014 recomenda a utilização de um diagrama simplificado, tanto para aços com patamar de escoamento ou sem, válido para temperaturas entre  $-20$  a  $150$  °C conforme Figura 3.



**Figura 2** – Diagrama tensão-deformação específica idealizado do concreto (NBR 6118, 2014).



**Figura 3** – Diagrama tensão-deformação específica para aços de armadura passiva NBR 6118 (2014).

## 2.5 Excentricidades

No dimensionamento de elementos de concreto a NBR 6118:2014 indica que devem ser consideradas excentricidades em todos os casos. Essa excentricidade pode ser dividida em dois grupos: de primeira e de segunda ordem. Este último caso será considerado somente em algumas hipóteses.

Nas excentricidades de primeira ordem estão incluídas as excentricidades iniciais e as acidentais. Esta primeira ocorre quando existe realmente uma distância do centro geométrico da seção ao ponto de aplicação da força, ou quando se substitui o momento aplicado no pilar por uma força normal, somada a uma excentricidade fictícia. O segundo tipo de excentricidade de primeira ordem, a acidental, ocorre pelo fato de se considerar a incerteza na posição exata do ponto de aplicação da força, e também pela possibilidade de imperfeições globais e locais na execução dos elementos.

Já nas excentricidades de segunda ordem estão englobadas as excentricidades devido aos efeitos de segunda ordem de fato e as devido à fluência do concreto. As primeiras ocorrem devido às solicitações provenientes da posição deformada da estrutura. Para tanto se considera um aumento na excentricidade total, incluindo-se a de segunda ordem. A segunda ocorre devido à propriedade do concreto de se deformar ao longo do tempo. A NBR 6118:2014 recomenda que seja considerado esse tipo quando a esbelteza dos pilares estiver acima de 90.

## 2.6 Efeitos de segunda ordem

Os efeitos de segunda ordem são aqueles oriundos da posição deformada da estrutura, a qual estará sujeita a solicitações diferentes dos inicialmente impostos devido aos momentos gerados pelas forças iniciais aplicadas às deformações ou excentricidades geradas por essas.

A NBR 6118:2014 trata desses efeitos em um item especial, considerando excentricidades adicionais de acordo com o índice de esbelteza do pilar. Para pilares com índice de esbelteza  $\lambda \leq 90$  a referida norma permite que sejam utilizados métodos aproximados para determinação desses efeitos. Já para pilares com índice de esbelteza  $\lambda > 90$  deve-se utilizar métodos mais refinados, e para tanto é sugerido nessa norma o método geral e para pilares com índice de esbelteza  $\lambda < 140$  os métodos dos pilares-padrão acoplados a diagramas M, N,  $1/r$ .

SMANIOTTO (2002) explica que o problema de determinação dos efeitos então é dividido em seis grupos.

### 1. Pilares com $\lambda \leq 200$ :

pode ser utilizado o método geral (item 15.8.3.2 da NBR 6118:2014;

### 2. Pilares com $\lambda \leq 140$ submetidos à flexão composta normal:

pode ser utilizado o método do pilar-padrão

acoplado a diagramas M, N, 1/r (item 15.8.3.3.4 da NBR 6118:2014);

**3. Pilares com  $\lambda \leq 90$ , seção retangular constante, armadura simétrica e constante ao longo de seu eixo, submetidos à flexão composta normal:**

podem ser utilizados o método do pilar-padrão com curvatura aproximada (item 15.8.3.3.2 da NBR 6118:2014), ou o método do pilar-padrão com rigidez  $\kappa$  aproximada (item 15.8.3.3.3 da NBR 6118:2014);

**4. Pilares com  $\lambda \leq 90$ , seção retangular constante, armadura simétrica e constante ao longo de seu eixo, submetidos à flexão composta oblíqua:**

pode ser utilizado o método do pilar-padrão com rigidez  $\kappa$  aproximada admitindo-se que os momentos totais atuem simultaneamente nas duas direções principais x e y (item 15.8.3.3.3 e 15.8.3.3.5 da NBR 6118:2014);

**5. Pilares com  $\lambda \leq \lambda_1$  (Pilares Curtos):**

as solicitações locais de 2ª ordem podem ser desprezados (item 15.8.2 da NBR 6118:2014);

Este trabalho tem como objetivo estudar pilares com índice de esbeltez menores que 90, por ser o tipo de pilar mais utilizado na prática. Dessa forma será tratado apenas o método do pilar-padrão com curvatura aproximada da NBR 6118:2014, já que esse método fornece valores mais próximos da realidade conforme apresentado por CARDOSO JUNIOR e KIMURA (2013).

**2.6.1 Método do Pilar-padrão com curvatura aproximada**

O método aqui descrito é prescrito na NBR 6118:2014 baseado no pilar-padrão, e apresenta algumas aproximações para os valores da curvatura. A norma apresenta em seu item 15.8.3.3.2 o método de cálculo para obtenção do momento total máximo no pilar.

A curvatura do pilar-padrão para efeito de cálculo é aproximada em função da altura da seção transversal e da força adimensional por:

$$\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{0,005}{h(\nu + 0,5)} \leq \frac{0,005}{h} \quad (1)$$

e a força adimensional  $\nu$  é dada por:

$$\nu = \frac{N_d}{A_c \cdot f_{cd}} \quad (2)$$

onde

$N_d$  – força normal solicitante;

$A_c$  – área de concreto da seção transversal;

$f_{cd}$  – força resistente de cálculo do concreto.

Dessa forma o momento total é calculado como sendo o momento total de primeira ordem acrescido do momento de segunda ordem. A NBR 6118:2014 prescreve a fórmula para o cálculo desse momento solicitante

$$M_{d,tot} = \alpha_b \cdot M_{1d,A} + \frac{N_d \cdot l_c^2}{r} \cdot 1 \geq M_{1d,A} \quad (3)$$

onde

$\alpha_b$  – coeficiente de ponderação do momento de primeira ordem em função do diagrama de momento solicitante;

$M_{1d,A}$  – momento de primeira ordem atuante na seção crítica do pilar.

Com isso, é possível calcular o momento total para os pilares medianamente esbeltos, ou seja, aqueles cujo índice de esbeltez é maior que o mínimo e menor que 90.

### 3 Dimensionamento Otimizado de Pilares Retangulares

O dimensionamento otimizado da seção transversal de pilares de concreto envolve muitas variáveis e restrições para obedecer a todas as recomendações prescritas nas normas vigentes. Vários limites são impostos, como dimensões mínimas da seção transversal, área mínima e máxima de aço, espaçamento entre as armaduras, efeitos de segunda ordem, a depender do índice de esbeltez do pilar, entre outros.

Além disso, o processo de otimização para ser bem-sucedido depende de uma calibração bem concebida, com as diversas análises realizadas com o mínimo de aproximações para que o processo se comporte o mais próximo do real possível, e se consiga melhorar os parâmetros de minimização. SIAS e ALVES (2014) apresentam resultados para otimização de pilares com carregamento centrado comparando diferentes de métodos de otimização para verificar a viabilidade desses métodos para o problema em questão. Aponta-se

neste trabalho que o melhor método seria o Método dos Pontos Interiores.

### 3.2 Variáveis do problema

Para definição do problema, serão tratadas as principais variáveis que definem todos os parâmetros de resistência e custo relacionados ao dimensionamento dos pilares retangulares. A partir dessas, serão elaboradas as funções objetivo e restrições que definirão de fato o problema. São essas:

- $x_1$  – largura (b) da seção transversal do pilar;
- $x_2$  – altura (h) da seção transversal do pilar;
- $x_3$  – área de aço da seção transversal;
- $x_4$  – profundidade da LN em relação ao bordo mais comprimido da seção transversal;
- $x_5$  – inclinação da linha neutra;

Para ilustrar melhor essas variáveis pode-se observar a Figura 4

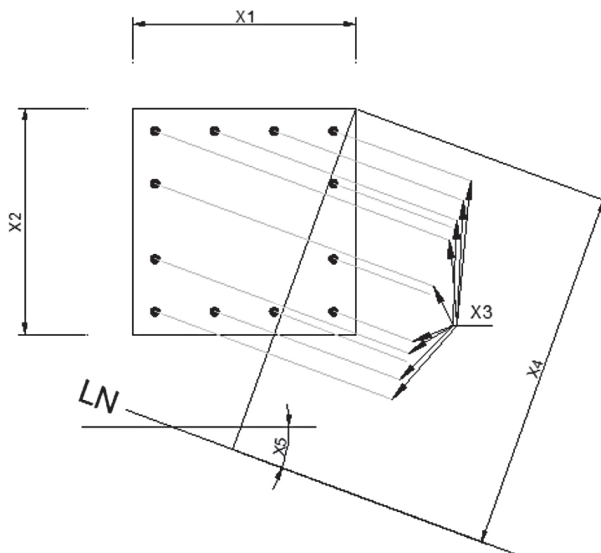


Figura 4 – Variáveis da seção transversal do pilar.

### 3.3 Função Objetivo

Conforme já citado anteriormente, o objetivo que se pretende é minimizar o custo por metro da seção transversal de um pilar de acordo com as solicitações dadas. No custo estão envolvidos vários aspectos como o preço dos materiais, preço de mão de obra, tempo gasto na produção, perdas, entre outros. No entanto serão padronizados alguns desses parâmetros, como o tempo gasto na produção e as perdas que são geradas, com auxílio de tabelas e índices que se utilizam na elaboração de orçamentos, por exemplo, com a finalidade de uniformizar os dados e viabilizar a confecção da função objetivo.

Sabe-se que o custo do aço é dado por peso, e esse varia de acordo com o diâmetro das barras para cada metro de comprimento (na realidade existe também uma pequena distorção do preço do aço de acordo com o diâmetro  $\phi$  de cada barra, que será desprezado neste trabalho para efeito de simplificação). Assim, para cada diâmetro de barra, haverá um custo por metro. No entanto sabe-se qual o peso específico do aço  $\rho_s$ , bem como o custo por unidade de peso  $C_s$ , já incluindo nesse custo o preço do material e da mão de obra, e também a área de aço (A) que irá variar para cada problema, e será denominado de  $x_3$  conforme definido anteriormente. A área de aço pode ser descrita como:

$$A_s = x_3 \tag{4}$$

e o valor do aço por metro poderá então escrito da seguinte forma

$$V_s = C_s \cdot \rho_s \cdot A_s \tag{5}$$

Definido o custo do aço, deve-se agora estabelecer os parâmetros para calcular o custo do concreto que será utilizado. Este custo é dado pelo volume de material utilizado. Os índices de produtividade também se baseiam nesse mesmo custo por unidade de volume. Dessa forma é possível definir um parâmetro  $C_c$  que será chamado de custo total do concreto por unidade de volume. Nesse custo estarão englobadas as despesas com mão de obra e material. Para se chegar ao valor do custo do concreto por metro de pilar, deve-se multiplicar o custo unitário pela área de concreto. Como neste trabalho serão tratadas apenas seções retangulares, essa área será descrita da seguinte forma:

$$A_c = x_1 \cdot x_2 \tag{6}$$

e o valor do concreto por metro poderá então ser assim descrito por

$$V_c = C_c \cdot A_c \tag{7}$$

Por fim, deve-se definir o custo das formas que irá integrar os outros custos citados para compor o preço final dos pilares. Tanto o custo do material quanto os índices de mão de obra disponíveis são especificados em função da área de forma gasta. Portanto, será definido o parâmetro  $C_f$  como sendo o custo das formas, já englobando o preço do material e da mão de obra, por unidade de área. Para se obter o preço da forma por unidade de comprimento dos pilares deve-se então multiplicar esse fator pelo perímetro do pilar, que é descrito da seguinte forma:



$$2p = 2(x_1 + x_2) \quad (8)$$

Assim, o valor das formas por unidade de comprimento do pilar será descrito:

$$V_f = C_f \cdot 2p \quad (9)$$

Com todos os parâmetros dos custos envolvidos na composição final dos pilares já definidos é possível se determinar a expressão final do custo do pilar por unidade de comprimento. Essa expressão será a função objetivo do problema, a qual se pretende minimizar, e será assim descrita:

$$F = V_s + V_c + V_f \quad (10)$$

Substituindo-se as Equações (5), (6) e (9) na Equação (10) tem-se:

$$F = C_s \cdot \rho_s \cdot A_s + C_c \cdot A_c \cdot C_f \cdot 2p \quad (11)$$

e ainda substituindo-se as Equações (4), (5) e (8) na Equação (11) resulta

$$F = C_s \cdot \rho_s \cdot x_3 + C_c \cdot x_1 \cdot x_2 + C_f \cdot 2(x_1 + x_2) \quad (12)$$

### 3.4 Funções de restrição

Para a completa definição do problema deve-se determinar as restrições na qual o problema tem, definindo-se assim os limites nos quais o algoritmo desenvolvido irá trabalhar para encontrar o ponto ótimo. Dessa forma serão apresentadas as restrições inerentes ao problema a seguir.

#### • Critérios de Resistência

O critério mais importante nos dimensionamentos de estruturas é o critério da resistência. É ele que garante a estabilidade do elemento, ou conjunto desses, implicando que a sollicitação imposta à estrutura deve ser menor que o esforço resistente, ou seja:

$$\frac{N_R}{N_S} - 1 \geq 0 \text{ e } N_S \neq 0 \quad (13)$$

$$\frac{M_{xR}}{M_{xS}} - 1 \geq 0 \text{ e } M_{xS} \neq 0 \quad (14)$$

$$\frac{M_{yR}}{M_{yS}} - 1 \geq 0 \text{ e } M_{yS} \neq 0 \quad (15)$$

onde

$N_R$  – força normal resistente;

$N_S$  – força normal sollicitante;

$M_{xR}$  – momento fletor na direção x resistente;

$M_{xS}$  – momento fletor na direção x sollicitante;

$M_{yR}$  – momento fletor na direção y resistente;

$M_{yS}$  – momento fletor na direção y sollicitante;

A expressão utilizada para a força normal resistente de cálculo utilizada será a seguinte:

$$N_{Rd} = \left( \sum_{b=1}^{40} \sum_{h=1}^{40} \sigma_{ci} \cdot A_{ci} \right) + \left[ \frac{x_3}{2 \cdot n + 2 \cdot m} \right] \cdot \left[ \left( \sum_{k=0}^n \sigma_{sd}(k+1) + \sigma_{se}(k+1) \right) + \left( \sum_{j=0}^m \sigma_{ss}(j+1) + \sigma_{si}(j+1) \right) \right] \quad (16)$$

As expressões utilizadas para os momentos fletores resistentes de cálculo utilizadas serão dados por:

$$M_{xRd} = \left( \sum_{b=1}^{40} \sum_{h=1}^{40} \sigma_{ci} \cdot A_{ci} \cdot y_{ci} \right) + \sum_{j=0}^m \left[ \left( \frac{x_3}{2 \cdot n + 2 \cdot m} \right) \cdot \left( \sigma_{ss}(j+1) \cdot y_{ss}(j+1) + \sigma_{si}(j+1) \cdot y_{si}(j+1) \right) \right] + \sum_{k=0}^n \left[ \left( \frac{x_3}{2 \cdot n + 2 \cdot m} \right) \cdot \left( \sigma_{sd}(k+1) \cdot y_{sd}(k+1) + \sigma_{se}(k+1) \cdot y_{se}(k+1) \right) \right] \quad (17)$$

$$M_{yRd} = \left( \sum_{b=1}^{40} \sum_{h=1}^{40} \sigma_{ci} \cdot A_{ci} \cdot x_{ci} \right) + \sum_{j=0}^m \left[ \left( \frac{x_3}{2 \cdot n + 2 \cdot m} \right) \cdot \left( \sigma_{ss}(j+1) \cdot x_{ss}(j+1) + \sigma_{si}(j+1) \cdot x_{si}(j+1) \right) \right] + \sum_{k=0}^n \left[ \left( \frac{x_3}{2 \cdot n + 2 \cdot m} \right) \cdot \left( \sigma_{sd}(k+1) \cdot x_{sd}(k+1) + \sigma_{se}(k+1) \cdot x_{se}(k+1) \right) \right] \quad (18)$$

onde

$\sigma_{sd}(k+1)$  – é a tensão atuante nas barras da direita da seção transversal;

$\sigma_{se}(k+1)$  – é a tensão atuante nas barras da esquerda da seção transversal;

$\sigma_{ss}(j+1)$  – é a tensão atuante nas barras superiores da seção transversal;

$\sigma_{si}(j+1)$  – é a tensão atuante nas barras inferiores da seção transversal;

$\sigma_{ci(b,h)}$  – é a tensão atuante nos elementos de concreto da seção transversal;

$A_{ci(b,h)}$  – é a área dos elementos de concreto da seção transversal;

$m$  – é o número de barras na direção x;

$n$  – é o número de barras na direção y.

As tensões atuantes nas barras e nos elementos de concreto dependerão da sua posição na seção transversal, por conta da linha neutra e da sua distância ao CG da seção, como pode ser observado na Figura 5.

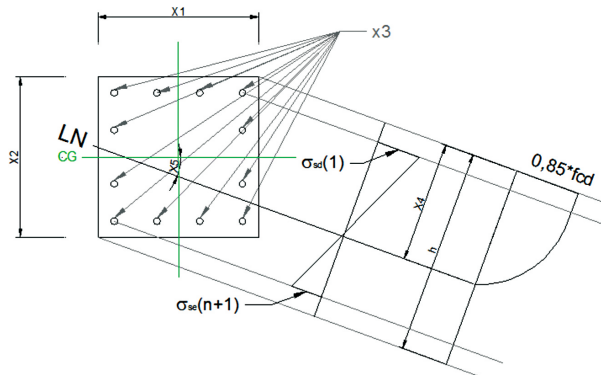


Figura 5 – Solicitações na seção transversal do pilar.

• **Crítérios dos limites de armadura**

A NBR 6118:2014 recomenda que os pilares devam ter uma armadura longitudinal mínima para garantir uma resistência adequada, bem como limita uma área máxima de armadura na seção transversal para que seja considerado “concreto armado” e também não seja violada nenhuma condição necessária de segurança. Dessa forma podem-se escrever essas funções da seguinte maneira:

$$A_{s,min} = (0,15N_d / f_{yd}) \geq 0,004A_c \quad (19)$$

$$A_{s,max} = 4,0A_c \quad (20)$$

Com relação à restrição de armadura máxima da seção transversal a NBR 6118:2014, em seu item 17.3.5.3.2, estabelece que a armadura máxima seja de 8% da área do concreto, devendo se considerar a região de traspasse inclusive. Como no traspasse das armaduras de um pavimento à outro, a área de aço é duplicada pelo fato de todas as armaduras serem normalmente traspassadas por outra de mesmo diâmetro, será considerada como área máxima de aço a metade do valor estabelecido na norma, ou seja, 4% da área de concreto.

Além dos limites da área total de aço, a NBR 6118:2014, em seu item 18.4.2.2, ainda limita o espaçamento máximo e mínimo entre as armaduras longitudinais dos pilares. Segundo o texto dessa norma, é estabelecido que:

$$esp_{min} = 20 \text{ mm} \geq \phi_{barra} \geq 1,2 \text{ dimensão máx. agergado} \quad (21)$$

onde

$esp_{min}$  – espaçamento mínimo entre barras longitudinais;

$esp_{máx}$  – espaçamento máximo entre barras longitudinais;

$\phi$  barra – é o diâmetro das barras longitudinais.

• **Crítério dos limites geométricos**

Além da taxa de aço e espaçamento entre armaduras, a NBR 6118:2014 também impõe restrições com relação à geometria da seção transversal. No caso das seções retangulares essa norma recomenda que não sejam projetados pilares com dimensões menores que o limite especificados e, que a área da seção transversal também é limitada. Dessa forma tem-se também as restrições:

$$A_c - A_{min} \geq 0 \quad (22)$$

$$b - b_{min} \geq 0 \quad (23)$$

$$h - h_{min} \geq 0 \quad (24)$$

onde  $A_{min}$ ,  $b_{min}$  e  $h_{min}$  são os limites da área, largura e altura mínimos da seção recomendados pela NBR 6118:2014.

A norma prescreve no seu item 13.2.3 que para pilares com dimensões inferiores a 19 cm, e com limite mínimo de 14 cm, seja adicionado um coeficiente de majoração das cargas solicitantes. Para efeito de simplificação serão considerados no *software* apenas pilares com dimensões maiores que 19 cm.

A área mínima da seção transversal, segundo a referida norma, deve ser 360 cm<sup>2</sup>. Com os limites mínimos das dimensões dos pilares fixados em 19 cm, essa restrição da área mínima passa a ser automaticamente verificada.

• **Crítério do índice de esbeltez**

Deve-se observar ainda o índice de esbeltez dos pilares, pois a análise e o dimensionamento podem variar para cada faixa desses índices conforme explicado na seção do dimensionamento de pilares de concreto, pelo modo como serão ou não analisados os efeitos de segunda ordem, fluência e retração.

**3.5 Definição do problema final**

Expostas todas variáveis e funções relativas ao problema pode-se descrevê-lo conforme formulações apresentadas a seguir. O algoritmo implementado irá utilizar essas informações para que, por meio da programação matemática, se consiga calcular o

resultado otimizado da seção transversal de um pilar, dadas as solicitações.

Minimizar:

$$F = C_s \cdot \rho_s \cdot x_3 + C_c \cdot x_1 \cdot x_2 + C_f \cdot 2 \cdot (x_1 + x_2) \quad (25)$$

submetido à

$$\frac{N_R}{N_S} - 1 \geq 0 \text{ se } N_S \neq 0 \quad (26)$$

$$\frac{M_{xR}}{M_{xS}} - 1 \geq 0 \text{ se } M_{xS} \neq 0 \quad (27)$$

$$\frac{M_{yR}}{M_{yS}} - 1 \geq 0 \text{ se } M_{yS} \neq 0 \quad (28)$$

$$x_3 - 0,004x_1 \cdot x_2 \geq 0 \quad (29)$$

$$0,04x_1 \cdot x_2 - x_3 \geq 0 \quad (30)$$

$$\text{esp}_{\text{longit.}} - \text{esp}_{\text{min}} \geq 0 \quad (31)$$

$$\text{esp}_{\text{máx}} - \text{esp}_{\text{longit.}} \geq 0 \quad (32)$$

$$x_1 \cdot x_2 - A_{\text{min}} \geq 0 \quad (33)$$

$$x_1 - b_{\text{min}} \geq 0 \quad (34)$$

$$x_1 - b_{\text{min}} \geq 0 \quad (35)$$

$$x_2 - h_{\text{min}} \geq 0 \quad (36)$$

## 4 Análises Numéricas

Para comprovar a eficiência e reafirmar a importância da rotina de dimensionamento otimizado de pilares, essa seção trará alguns exemplos da literatura com soluções conhecidas com análises comparativas.

Nessas análises serão comparados os resultados da seção de aço obtida pelo programa desenvolvido com o da solução conhecida para seção transversal mantida fixa, e será aplicado então o método de otimização para ver qual a redução de custo obtida nos exemplos.

### 4.1 Exemplo 1

O primeiro exemplo que será utilizado é o problema apresentado por CARVALHO e PINHEIRO (2009) em seu capítulo 4, e o problema tratado onde o de número 4.11.

A partir das solicitações, CARVALHO e PINHEIRO (2009) propuseram uma geometria de pilar já conhecida, para então procurarem a área de aço que julgaram ser a mais econômica em função do carregamento atuante. Trata-se de um problema de dimensionamento à flexão oblíqua, de uma seção transversal submetida à força normal  $N_d = 1.550 \text{ kN}$ , com excentricidades totais no ponto de aplicação dessa força de:  $e_x = 7,5 \text{ cm}$  e  $e_y = 20 \text{ cm}$  gerando momentos  $M_{xd} = 310 \text{ kN.m}$ ;  $M_{yd} = 116,25 \text{ kN.m}$ . Além disso, foi utilizado concreto com  $f_{ck} = 20 \text{ MPa}$ , aço CA-50, e considerada a distância entre o centro das armaduras longitudinais até a face externa dos pilares  $d' = 3 \text{ cm}$ . Para a seção transversal foi escolhida uma geometria que se constitui num retângulo de base  $B = 30 \text{ cm}$  e altura  $H = 60 \text{ cm}$ .

CARVALHO e PINHEIRO (2009) não calcularam o custo da seção encontrada. Para efeito de comparação, será calculado também aqui o custo da solução da literatura, pois, nesse caso esse será o parâmetro ideal para comparar a melhor solução. Será adotado a massa específica do aço como  $\rho_s = 7.850 \text{ kg/m}^3$  conforme sugerido na NBR 6118:2014; serão considerados  $C_s = \text{R\$ } 6,43/\text{kg}$ ,  $C_f = \text{R\$ } 45,00/\text{m}^2$  e  $C_c = \text{R\$ } 311,27/\text{m}^3$  (valores obtidos da tabela SINAPI da Caixa Econômica Federal, para o mês de Junho/2014, referente à cidade de Vitória – ES).

Esses autores fizeram o dimensionamento por ábacos adimensionais. Em sua primeira tentativa, consideraram a seção trabalhando com cinco ou mais barras atuando em cada face da seção, e encontraram uma determinada área de aço. Após resultado obtido na primeira análise, fizeram uma segunda tentativa, em que diminuíram a quantidade de barras, sendo apenas uma barra em cada canto e mais uma em cada face da seção transversal. Feito isso pararam o dimensionamento e escolheram essa seção como a melhor solução.

A partir análise de CARVALHO e PINHEIRO (2009) pode-se realizar o dimensionamento pela formulação no problema de otimização, podendo-se assim, determinar a seção ótima para o pilar analisado.

A segunda análise do problema foi realizada com a geometria da seção transversal, podendo variar com a finalidade de se encontrar a solução ótima para o problema proposto.

Os resultados obtidos para a área de aço e geometria encontram-se na Tabela 1.

Pode se observar que na primeira tentativa, CARVALHO e PINHEIRO (2009) encontraram uma



área de aço consideravelmente maior que sua segunda tentativa, e que o resultado ótimo quando mantida a seção transversal fixa. Isso mostra que formulação proposta, mesmo com alguns parâmetros sendo invariáveis ( $x_1$  e  $x_2$ ), ainda sim encontra o modelo ótimo para as demais variáveis ( $x_3$ ,  $x_4$  e  $x_5$ ). Quando a seção pode variar, ou seja,  $x_1$  e  $x_2$  não mais foram fixados, e solução obtida pelo *software* diferiu em todas as variáveis, sendo a área de concreto consideravelmente maior, e a área de aço teve redução também significativa.

Na Tabela 2 podem ser verificados os custos e comparados seus resultados para cada seção. Conforme pode ser observado, as expectativas de redução do custo da seção transversal pela utilização do *software* de otimização foram confirmadas no exemplo proposto.

Quando a seção foi mantida fixa obteve-se uma

diferença de apenas 1 % para a solução considerada ideal por CARVALHO e PINHEIRO (2009), o que na prática significa dizer que as soluções foram as mesmas, por quando a área de aço for transformada nas barras de aço, a conversão adotará as mesmas barras para as duas soluções, e irá torná-las de fato idênticas.

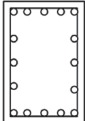
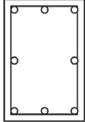
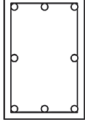
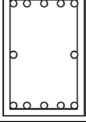
Já quando a seção transversal pode ser otimizada junto com a área de aço, foi notada uma redução significativa (26 %) em relação à seção considerada

ideal pelos autores, que implicaria em um projeto mais econômico.

#### 4.2 Exemplo 2

O segundo exemplo que será utilizado é o problema apresentado por FUSCO (1995) em seu capítulo 4, e o problema é o de número 4.1.3.

**Tabela 1** – Resultados obtidos para a solução do problema exemplo 1.

		B (cm)	H (cm)	As (cm <sup>2</sup> )	TIPO DE SEÇÃO
CARVALHO e PINHEIRO (2009)	Primeira Tentativa	30	60	48,5	
	Segunda Tentativa	30	60	39,6	
SOFTWARE DE OTIMIZAÇÃO	Geometria Fixa	30	60	40,3	
	Geometria Otimizada	40,3	71,5	11,5	

**Tabela 2** – Comparação de custos dos resultados obtidos exemplo 1.

		Consumo Concreto (m <sup>3</sup> /m)	Consumo Aço (kg/m)	Consumo Forma (m <sup>2</sup> /m)	Custo R\$/m	Diferença com segunda tentativa (%)
CARVALHO e PINHEIRO (2009)	Primeira tentativa	0,18	38,07	1,80	R\$ 381,83	13 %
	Segunda tentativa	0,18	31,09	1,80	R\$ 336,91	0 %
SOFTWARE de OTIMIZAÇÃO	Geometria Fixa	0,18	31,64	1,80	R\$ 340,44	1 %
	Geometria Otimizada	0,29	9,03	2,24	R\$ 248,40	-26 %

O problema também trata do dimensionamento à flexão oblíqua de uma seção transversal submetida à força normal  $N_k = 1.000$  kN, com coeficiente de majoração das cargas  $\gamma_f = 1,4$ . Foram consideradas excentricidades totais no ponto de aplicação dessa força de:  $e_x = 6$  cm e  $e_y = 28$  cm gerando momentos  $M_{xd} = 392$  kN.m ;  $M_{yd} = 84$  kN.m. Foi utilizado concreto com  $f_{ck} = 15$  MPa (na NBR 6118:2014, essa classe de concreto não é mais permitida para esta finalidade, mas como FUSCO é do ano de 1995, nessa época ainda era bastante utilizada essa classe concreto em elementos estruturais), aço CA-50B, e considerada a distância entre o centro das armaduras longitudinais até a face externa dos pilares  $d' = 3$  cm. Para a seção transversal foi escolhida uma geometria que se constitui num retângulo de base  $B = 30$  cm e altura  $H = 70$  cm.

Será realizado o mesmo procedimento que foi realizado no exemplo 1, ou seja, será comparado o resultado obtido pelo autor com o *software* de otimização para a seção transversal mantida fixa, e em seguida a seção transversal será liberada para que a solução ótima do problema para as solicitações sejam


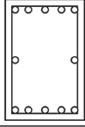
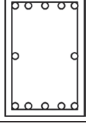
encontradas. Também serão adotados os mesmos valores do custo dos materiais que foram adotado no primeiro exemplo.

Os resultados obtidos para a área de aço e geometria pelo autor e por meio do *software* de otimização encontram-se na Tabela 3.

Pode se observar que a solução proposta por FUSCO (1995) apresentou uma área de aço praticamente igual ao resultado ótimo obtida com a presente formulação quando mantida a seção transversal fixa. Por esse fato deduz-se que o software, mesmo com alguns parâmetros sendo invariáveis ( $x_1$  e  $x_2$ ), ainda sim encontra o modelo ótimo para as demais variáveis ( $x_3$ ,  $x_4$  e  $x_5$ ).

Quando a seção pode variar, ou seja,  $x_1$  e  $x_2$  não mais foram fixados, a solução obtida pelo *software* diferiu em todas as variáveis, sendo a área de concreto consideravelmente maior, e a área de aço teve redução também significativa, do mesmo modo que no exemplo 1. Isso se justifica pelo fato de o preço do aço, quando comparado ao do concreto e das formas ser maior. Dessa forma o modelo ótimo procura diminuir a área de aço e aumentar a área de concreto.

**Tabela 3** – Resultados obtidos para a solução do problema exemplo 2.

		B (cm)	H (cm)	As (cm <sup>2</sup> )	TIPO DE SEÇÃO
FUSCO (1995)	Primeira Tentativa	30,00	70,00	38,74	
SOFTWARE DE OTIMIZAÇÃO	Geometria Fixa	30,00	70,00	38,45	
	Geometria Otimizada	38,42	86,00	13,22	

**Tabela 4** – Comparação de custos dos resultados obtidos exemplo 2.

		Consumo Concreto (m <sup>3</sup> /m)	Consumo Aço (kg/m)	Consumo Forma (m <sup>2</sup> /m)	Custo R\$/m	Diferença com Solução Literatura %
FUSCO (1995)	Solução Literatura	0,21	30,41	2,00	R\$ 350,91	0 %
SOFTWARE de OTIMIZAÇÃO	Geometria Fixa	0,21	30,19	2,00	R\$ 349,46	0 %
	Geometria Otimizada	0,33	10,37	2,49	R\$ 281,52	-20 %

Na Tabela 4 pode ser verificado o custo para cada seção encontrada e ser comparado os seus resultados. Conforme pode ser observado a expectativa de redução do custo da seção transversal pela utilização do *software* de otimização também foi confirmada.

Quando a seção foi mantida fixa a área de aço foi praticamente a mesma (a diferença foi menor que 1 %). Pode-se afirmar que mesmo quando a geometria de um pilar precise ser fixa, a utilização do *software* ainda sim se justifica, quando comparado com a utilização dos ábacos, pelo fato de se buscar a menor área de aço necessária para o carregamento solicitante sem necessitar da experiência do projetista na procura dos ábacos.

E quando a seção transversal pode ser otimizada junto com a área de aço, também foi notada uma redução significativa (20 %) em relação à seção considerada ideal pelos autores, fato que implicaria em um projeto mais econômico.

## 5 Conclusões

Diante do exposto sobre o tema do dimensionamento de pilares e processos de otimização, este trabalho mostra uma análise acerca dos parâmetros prescritos na NBR 6118:2014 para utilização em pilares, especialmente nos casos mais complexos de flexo-compressão oblíqua.

O Método dos Pontos Interiores mostrou-se eficiente na obtenção da solução ótima do problema, tendo em vista os resultados obtidos nas tabelas comparativas.

A utilização do Matlab como ferramenta de suporte facilitou em muito o desenvolvimento do problema, considerando-se as bibliotecas existentes com rotinas previamente definidas para aplicação a problemas de otimização. Foi utilizada nesta programação a função do Matlab “fmincon”, que tratou do método de otimização por meio da programação matemática, e nesse caso específico foi utilizado o método dos pontos interiores.

Após as resoluções de problemas conhecidos da literatura, como em FUSCO (1995) e CARVALHO e PINHEIRO (2009), e comparados os resultados obtidos pela presente formulação com o dimensionamento ótimo, verificou-se que esse teve sua eficiência comprovada, além de também ser viabilizada sua utilização nos projetos de concreto armado para auxiliar o projetista na escolha das seções de pilares retangulares mais econômicas.

## 6 Referências

- ARGOLO, W. P. **Otimização de seções de concreto armado submetidas à flexo-compressão reta utilizando algoritmos genéticos.** 2000. Dissertação (Mestrado em Ciências em Engenharia Civil) – COPPE, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2000.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **Projeto de estruturas de concreto – Procedimento.** NBR 6118, Rio de Janeiro, 2014.
- BANDEIRA, A. A.; MIRANDA, T. K. **Uma abordagem acadêmica sobre a aplicação da otimização no dimensionamento de estruturas de concreto armado.** In: Congresso Brasileiro de Ensino de Engenharia, 34, 2006, Passo Fundo. Anais... Passo Fundo: Universidade de Passo Fundo, 2006. p. 2.147-2.161.
- BASTOS, ERICH ARAUJO. **Otimização de Seções Retangulares de Concreto Armado Submetidas à Flexo - Compressão Oblíqua Utilizando Algoritmos Genéticos.** 2004, 151f. Dissertação (Mestrado em Ciências em Engenharia Civil) – COPPE, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2004.
- CARDOSO JUNIOR, S. D.; KIMURA, A. E. **Sistema computacional para análise não linear de pilares de concreto armado.** In: Congresso Brasileiro de Concreto, 55, 2013, IBRACON: Gramado, Rio Grande do Sul, 2013, p. 1-15.
- CARVALHO, R. C.; PINHEIRO, L. M. **Cálculo e Detalhamento de Estruturas Usuais de Concreto.** São Paulo: PINI, 2009, 589 p., Volume 2.
- CHAVES, I. A.; EL DEBS, A. L. H. C. **Otimização de pilares de concreto armado mediante uniformização do índice de confiabilidade.** Cadernos de Engenharia de Estruturas, São Carlos, v. 10, n. 45, p. 1-22, 2008.
- CORTÊS, C. F. M. **Otimização do Projeto da Superestrutura de Pontes Pré-fabricadas pelo Método dos Algoritmos Genéticos.** 2010. 202f. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) – COPPE, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2010.
- E SILVA, A. B. C.; FALCÓN, G. A. S.; GARCIA, S. L. G. **Dimensionamento ótimo de vigas de concreto armado com seção T.** Mecânica computacional, Asociacion Argentina de Mecánica Computacional, v. 29, p. 9217-9230. Argentina: Buenos Aires, 2010.
- FUSCO, PÉRICLES BRASILIENSE. **Estruturas de Concreto: Solicitações Normais.** Rio de Janeiro: Editora Guanabara Dois, 1995, 464p.
- MATLAB, **Optimization toolbox user’s guide.** Natick: Mathworks, 2007.
- MEDEIROS, G.F.; KRIPKA, M. **Algumas aplicações de métodos heurísticos na otimização de estruturas.**

- Rev. CIATEC, Universidade de Passo Fundo, v. 4, n. 1, p. 19-32, 2012.
- PEREA C.; BAITSCH M.; GONZÁLEZ-VIDOSA F.; HARTMANN, D. **Optimization of reinforced concrete frame bridges by parallel genetic and memetic algorithms.** In: ZINGONI A. Structural Engineering, Mechanics and Computation 3. Holanda: Millpress, 2007.
- PEREIRA, ANDERSON. **Projeto Ótimo de Pórticos Planos com Restrição a Flambagem.** 2002. 99f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2002.
- RAMOS, HENRY OCTAVIO CORTÉS. **Um Algoritmo para Otimização Restrita com Aproximação de Derivadas.** 2011. 118f. Tese (Doutorado em Ciências em Engenharia Mecânica) – Programa de Engenharia Mecânica, COPPE, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2004.
- RIGO, E. **Métodos de Otimização aplicados à Análise de Estruturas.** 1999. 105f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1999.
- RODRIGUES JÚNIOR, SANDOVAL JOSÉ. **Otimização de Pilares de Edifícios Altos de Concreto Armado.** 2005. 154f. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2005.
- SIAS, F. M.; ALVES, E. C. **Dimensionamento ótimo de pilares de concreto armado.** Rev. REEC, Universidade Federal de Goiás, v. 9, n. 3, p. 16-31, 2014.
- SIAS, FRANCESCO MAYER. **Dimensionamento ótimo de pilares de concreto armado.** 2014. 153f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, 2014.
- SILVA, MARCELO ARAÚJO DA. **Sobre a Otimização de Estruturas Submetidas a Carregamento Dinâmico.** 2000. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) – Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2000.
- SILVA, MICHELE MARLANE DA. **Otimização de Estruturas Reticuladas Incluindo Não-Linearidade Geométrica.** 2011. Dissertação (Mestrado em Modelagem Computacional) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2011.
- SMANIOTTO, ALBERTO. **Dimensionamento e Detalhamento Automático de Pilares Retangulares Submetidos à Flexão Composta Oblíqua.** 2005. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Santa Catarina, Santa Catarina, 2005.
- SMANIOTTO, ALBERTO. **Elaboração de Programa Para Dimensionamento e Detalhamento de Pilares Retangulares Submetidos à Flexo-Compressão Normal com Armadura Distribuída ao Longo das Faces.** 2002. Dissertação (Graduação em Engenharia Civil) – Departamento de Engenharia Civil, Universidade Federal de Santa Catarina, Santa Catarina, 2002.
- SOARES, R. C. **Otimização de Seções Transversais de Concreto Armado Sujeitas à Flexão: Aplicação a Pavimentos.** 1997. 209f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1997.
- TELES, M. L.; GOMES, H. M. **Comparação de algoritmos genéticos e programação quadrática sequencial para otimização de problemas em engenharia.** Rev. Teoria e prática na Engenharia Civil. Rio Grande, n. 15, p. 29-39, 2010.
- VIANNA, L. C. C. **Otimização de seções transversais de concreto armado: aplicação a pórticos.** 2003. 127f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2003.