

Análise Variacional de Segunda Ordem Não-Linear em Pilares de Concreto Armado com Uso de Relação Momento-Curvatura Analiticamente Ajustada

Felipe Miranda da Silva¹

Resumo

Nesse trabalho, estudaremos os efeitos de não linearidades físicas e geométricas em um pilar de estudo, em flexão composta reta, considerando uma análise variacional simplificada para se obter o campo de deslocamentos e esforços internos no mesmo. Nestas estruturas, os efeitos de segunda ordem devem ser sempre analisados, uma vez que estão sujeitas a estados de flexo-compressão e surgem, desta configuração, esforços adicionais de flexão introduzidos pelas cargas compressivas. Sendo o material concreto armado, esta análise se torna ainda mais complexa pois engloba também a consideração das não linearidades físicas do material. Inicialmente, apresentamos os fundamentos teóricos para as análises aqui desenvolvidas, então discorreremos sobre o ajuste da relação momento-curvatura e, por fim, aplicaremos o método dos elementos finitos para obtenção dos campos desejados.

Palavras-chave: Efeitos de segunda ordem, Análise Variacional, Pilares de Concreto Armado, Relação Momento-Curvatura, Elasticidade Não-Linear.

1 Introdução

O estudo de pilares é uma das verificações essenciais quando do dimensionamento de muitas estruturas de concreto armado. Em múltiplas obras da engenharia civil, como edifícios e pontes, a consideração destes elementos estruturais é uma peça chave para se garantir o bom funcionamento da estrutura como um todo. Sendo responsáveis pela transmissão de cargas verticais, os pilares estão geralmente sujeitos à condição de flexo-compressão, portanto surge a necessidade da consideração de efeitos de segunda ordem e de análise de estabilidade do pilar como um todo.

Neste artigo, a consideração dos efeitos de segunda ordem será realizada no âmbito da flexo-compressão reta de pilares retangulares, e compreenderá as não linearidades geométrica e física envolvidas. Para a primeira, deveremos considerar que o pilar efetuará deslocamentos finitos, e nos posicionar, portanto, no âmbito da teoria da elasticidade finita. Já para a segunda, é notório que o concreto armado é um material com relação tensão-deformação não-linear, de modo que uma consideração mais precisa das deformações às quais o mesmo estará sujeito quando das solicitações externas será realizada em se obtendo sua relação

momento-curvatura, a qual será, então, ajustada via método dos mínimos quadrados.

O modelo teórico que será desenvolvido para abarcar ambas tais não linearidades será oriundo do cálculo variacional, isto é, resolveremos os pilares no que diz respeito a seu campo de deslocamento através do funcional da energia potencial total do mesmo, considerando que o pilar é feito de material elástico não-linear equivalente e que a forma energética clássica do funcional seja preservada. Assim, não se leva em conta a energia de deformação dissipada na fissuração da seção, nem os efeitos térmicos associados, já que o modelo teórico equivalente realiza o equilíbrio da seção tal como se a seção fissurada não contribuísse ao mesmo, tornando-o menos rígido.

Alguns outros resultados importantes serão igualmente derivados, bem como serão expostas as implicações daqueles. Então, apresentaremos os resultados de análise para um caso de pilar via método dos elementos finitos, os quais serão obtidos através de um programa desenvolvido em ambiente Matlab, com finalidade de apoiar os cálculos desenvolvidos na monografia que deu origem a este trabalho.

2 Fundamentos teóricos

Inicialmente, considera-se a não linearidade geométrica obtendo-se o tensor de deformações de Green, que considera em si deformações de segunda ordem, não capturadas pela teoria da elasticidade infinitesimal usual por meio do tensor de deformações de Cauchy (ALVES, 1987).

Considera-se, no âmbito da teoria de vigas, o vetor de deslocamentos medido a partir da configuração indeformada de cada pilar como sendo $d_i(x)$, cujas componentes são:

$$d_1 = u(x,y) \tag{2.1}$$

$$d_2 = v(x,y) \tag{2.2}$$

$$d_3 = w = 0 \tag{2.3}$$

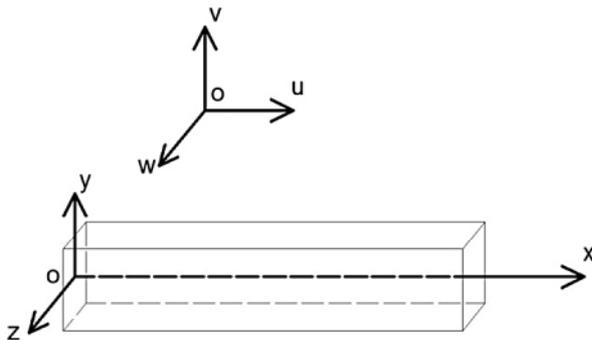


Figura 1 – Modelo de análise genérico.

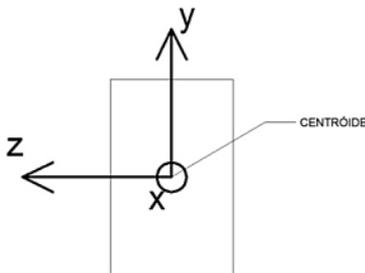


Figura 2 – Detalhe do sistema de eixos na seção.

Pode-se expressar o tensor das deformações de Green como sendo dado por:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (d_{i,j} + d_{j,i} + d_{k,i} \cdot d_{k,j}) \tag{2.4}$$

$$\varepsilon_{ij}^{(cauchy)} + \varepsilon_{ij}^{(2a\ ordem)}$$

Sendo o tensor de deformações de Cauchy expresso segundo:

$$\varepsilon_{ij}^{cauchy} = \frac{1}{2} (d_{i,j} + d_{j,i}) \tag{2.5}$$

Para análise de colunas, este tensor pode se simplificar para a seguinte forma (VENÂNCIO, 1975)

$$\varepsilon_{xx}(x,y) = u_{,x} - y \cdot v_{,xx} + \frac{1}{2} v_{,x}^2 \tag{2.6}$$

Em se supondo que o material siga a lei de Hooke generalizada, conforme:

$$\sigma_{ij} = A_{ijkl} \cdot \varepsilon_{kl} \tag{2.7}$$

Será possível se calcular a energia de deformação interna do sistema, que nesta abordagem de mais alta ordem envolverá termos adicionais aos clássicos. Esse cálculo conduz ao resultado seguinte, combinando 2.6 e 2.7:

$$U = \iiint_V \frac{\sigma_{ij} \cdot \varepsilon_{ij}}{2} dV = \iiint_V \frac{E \cdot \varepsilon_{xx}^2}{2} dv = \tag{2.8}$$

$$\iiint_V \frac{E \cdot \left(u_{,x} + \frac{1}{2} v_{,x}^2 - y \cdot v_{,xx} \right)^2}{2} dV$$

A qual, quando simplificada, e se se desprezando a contribuição dos termos de ordem mais alta (ALVES, 1995), leva a:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L EJ \cdot v_{,xx}^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L EA \cdot u_{,x}^2 dx + \tag{2.9}$$

$$\frac{1}{2} \int_0^L EA \cdot u_{,x} \cdot v_{,x}^2 dx$$

Para estudo desse modelo via método dos elementos finitos, generalizamos o modelo estrutura para um sistema plano reticulado genérico discretizado em elementos finitos de viga, com nós tendo três graus de liberdade: um deslocamento no eixo x, no eixo y, e uma rotação em torno do eixo z.

Para efeito de simulação computacional das condições de apoio, a esses nós são associadas molas com rigidez dada segundo os três graus de liberdade, que, quando deformadas, armazenam energia potencial elástica. Isto aumentará o funcional da energia potencial total, conforme se verá na expressão 6.3.

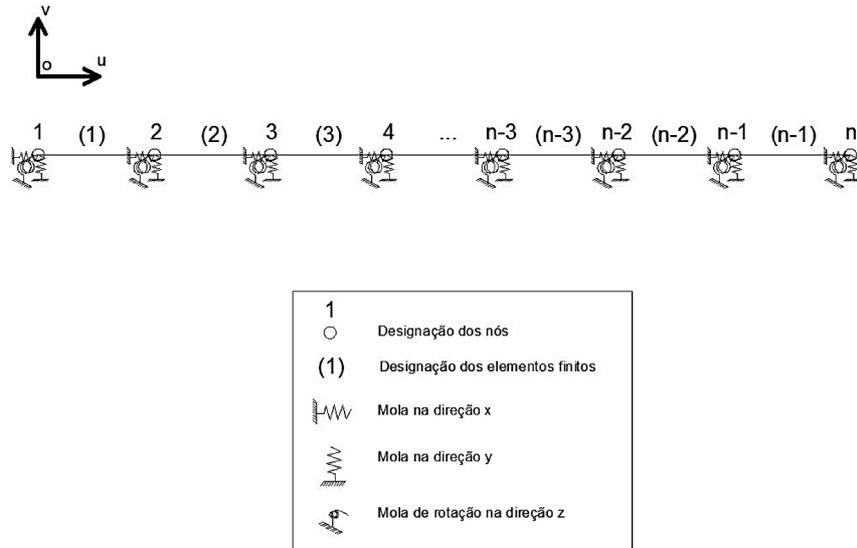


Figura 3 – Modelo de análise para uso do MEF.

Adicionando-se a contribuição das molas à energia de deformação, escrevemos:

$$\Pi = U - \dot{U} = \frac{1}{2} \int_0^L EJ \cdot v_{,xx}^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L EA \cdot u_{,x}^2 dx$$

$$\frac{1}{2} \int_0^L EA \cdot u_{,x} \cdot v_{,x}^2 dx$$

$$+ k_x^{(j)} \cdot \frac{u_j^2}{2} + k_y^{(j)} \cdot \frac{v_j^2}{2} + k_\phi^{(j)} \cdot \frac{v_{j,zx}^2}{2}$$

$$- \left[M_j \cdot v_{,x}^{(j)} + Fy_j \cdot v^{(j)} + Fx_j \cdot u^{(j)} \right]$$

(2.10)

sendo

M_j – momento nodal externo aplicado ao nó j .

Fx_j – força nodal externa aplicado ao nó j segundo a direção x .

Fy_j – força nodal externa aplicado ao nó j segundo a direção y .

$k_x^{(j)}$ – rigidez da j -ésima mola no nó j segundo a direção x .

$k_y^{(j)}$ – rigidez da j -ésima mola no nó j segundo a direção y .

$k_\phi^{(j)}$ – rigidez flexional da j -ésima mola no nó j segundo a direção z .

Ω – trabalho das forças externas.

O princípio variacional associado a este funcional estabelece que, para que o sistema represente uma configuração de equilíbrio realizável, a primeira variação da energia potencial total deve ser nula, isto é (ALVES, 1995):

$$\delta\Pi = 0 \quad (2.11)$$

Um corolário de 2.12, igualmente notável, são as equações de equilíbrio, resultado da aplicação das equações de Euler-Lagrange ao funcional (BUTKOV, 1973), se escreve:

$$(EJ \cdot v_{,xx})_{,xx} - (EA \cdot u_{,x} \cdot v_{,x})_{,x} = 0 \quad (2.12)$$

$$\left(EA \cdot \left(u_{,x} + \frac{v_{,x}^2}{2} \right) \right)_{,x} = 0 \quad (2.13)$$

Observa-se, ainda, que, para 2.13, na condição de rotações moderadas, é válida a simplificação $v_{,x}^2 \ll 1$, o que permite desacoplar as equações de equilíbrio 2.12 e 2.13 e re-exprimir o funcional da energia potencial total igualmente desacoplado, no que diz respeito aos termos de deslocamento axial e transversal. Assim, sendo N a força normal compressiva no pilar:

$$EA \cdot u_{,x} = -N \quad (2.14)$$

Com a consideração 2.14, é possível desacoplar o comportamento flexional (associado aos

deslocamentos transversais e rotações) e de membrana (associado aos deslocamentos axiais). Assim, do ponto de vista flexional, um funcional de estudo equivalente se apresenta no seguinte:

$$\begin{aligned} \Pi = U - \dot{U} = & \frac{1}{2} \int_0^L EJ \cdot v_{,xx}^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L N \cdot v_{,x}^2 dx \\ & + k_y^{(j)} \cdot \frac{v_j^2}{2} + k^{(j)} \cdot \frac{v_{j,x}^2}{2} \\ & - \left[M_j \cdot v_{,x}^{(j)} + Fy_j \cdot v^{(j)} \right] \end{aligned} \quad (2.15)$$

Aproximando-se $v(x)$ nos elementos com as clássicas funções de Hermite, as quais geram um campo de deslocamentos aproximados $\widetilde{v}(x)$ o qual é função dos deslocamentos nodais generalizados $v^{(i)}$ e $v_{,x}^{(i)}$ pode-se escrever o funcional completo de forma aproximada como:

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi} = & \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n-1} EJ_j \int_0^{l_j} \widetilde{v}(x')^2_{,xx} dx' + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n-1} N_j \int_0^{l_j} \widetilde{v}(x')^2_{,x} dx' \\ & + k_y^{(j)} \cdot \frac{v_j^2}{2} + k_\varphi^{(j)} \cdot \frac{v_{j,x}^2}{2} \\ & - \left[M_j \cdot v_{,x}^{(j)} + Fy_j \cdot v^{(j)} \right] \end{aligned} \quad (2.16)$$

onde

EJ_j – é a rigidez flexional de referência no elemento j , tomada como a rigidez num extremo do elemento finito;

N_j – é o esforço normal de referência no elemento j , tomado como a força normal num extremo do elemento finito.

n – número de nós.

x' – coordenada de posição em cada elemento finito.

l_j – comprimento do j -ésimo elemento finito.

A minimização do funcional, como em 2.11, agora se assimila a uma minimização direta daquele em função dos deslocamentos nodais, sendo esse o método de Rayleigh-Ritz (BUTKOV, 1973). Isso conduz a um sistema de equações não-linear de tamanho $2n \times 2n$,

sendo n o número de nós, que permite definir o campo de deslocamentos do pilar. Assim, devem ser verificadas as seguintes relações:

$$\frac{\partial \tilde{\Pi}}{\partial v^{(i)}} = 0 \quad (2.17)$$

$$\frac{\partial \tilde{\Pi}}{\partial v_{,x}^{(i)}} = 0 \quad (2.18)$$

O que estabelece as seguintes relações de equilíbrio, em cada nó:

$$\begin{aligned} & \left[EJ_{i-1} \cdot \left(v^{(i-1)} \cdot -\frac{12}{l_{i-1}^3} + v_{,x}^{(i-1)} \cdot -\frac{6}{l_{i-1}^2} \right) \right. \\ & + \left(v^{(i)} \cdot \left(EJ_{i-1} \cdot \frac{12}{l_{i-1}^3} + EJ_i \cdot \frac{12}{l_i^3} \right) + v_{,x}^{(i)} \cdot \left(EJ_{i-1} \cdot -\frac{6}{l_{i-1}^2} + EJ_i \cdot \frac{6}{l_i^2} \right) \right) + EJ_i \\ & \cdot \left(v^{(i+1)} \cdot -\frac{12}{l_i^3} + v_{,x}^{(i+1)} \cdot \frac{6}{l_i^2} \right) \left. \right] \\ & + \left[N_{i-1} \cdot \left(v^{(i)} \cdot \frac{-6}{5 \cdot l_{i-1}} + v_{,x}^{(i)} \cdot \frac{-1}{10} \right) \right. \\ & + \left(v^{(i)} \cdot \left(N_{i-1} \cdot \frac{-6}{5 \cdot l_{i-1}} + N_i \cdot \frac{6}{5 \cdot l_i} \right) + v_{,x}^{(i)} \cdot \left(N_{i-1} \cdot -\frac{1}{10} + N_i \cdot \frac{1}{10} \right) \right) + N_i \\ & \cdot \left(v^{(i+1)} \cdot -\frac{6}{5 \cdot l_i} + v_{,x}^{(i+1)} \cdot \frac{1}{10} \right) \left. \right] + k_y^{(i)} \\ & - Fy_i = 0, \quad i = 0 \dots n \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned}
 & \left[EJ_{i-1} \cdot \left(v^{(i-1)} \cdot -\frac{6}{l_{i-1}^2} + v_{,x}^{(i-1)} \cdot -\frac{2}{l_{i-1}} \right) \right. \\
 & + \left(v^{(i)} \cdot \left(EJ_{i-1} \cdot \frac{-6}{l_{i-1}^2} + EJ_i \cdot \frac{6}{l_i^2} \right) + v_{,x}^{(i)} \right. \\
 & \cdot \left. \left. \left(EJ_{i-1} \cdot -\frac{4}{l_{i-1}} + EJ_i \cdot \frac{4}{l_i} \right) \right) + EJ_i \right. \\
 & \cdot \left. \left. \left. \left(v^{(i+1)} \cdot -\frac{6}{l_i^2} + v_{,x}^{(i+1)} \cdot \frac{2}{l_i} \right) \right] \right. \\
 & + \left[N_{i-1} \cdot \left(v^{(i)} \cdot \frac{1}{10} + v_{,x}^{(i)} \cdot \frac{-l_{i-1}}{30} \right) \right. \\
 & + \left(v^{(i)} \cdot \left(N_{i-1} \cdot \frac{-1}{10} + N_i \cdot \frac{1}{10} \right) + v_{,x}^{(i)} \right. \\
 & \cdot \left. \left. \left. \left(N_{i-1} \cdot \frac{2l_{i-1}}{15} + N_i \cdot \frac{2l_i}{15} \right) \right) + N_i \right. \\
 & \left. \left. \left. \left. \left. \left(v^{(i+1)} \cdot -\frac{1}{10} + v_{,x}^{(i+1)} \cdot \frac{-l_i}{30} \right) \right) + k_{\varphi}^{(i)} \right] \right. \\
 & \left. - M_i = 0, i = 0 \dots n \right.
 \end{aligned} \tag{2.20}$$

Juntas essas equações e as condições de contorno definem um sistema não-linear a ser determinado iterativamente. Nelas os termos associados a EJ dão origem à matriz de rigidez convencional do sistema, expressa por K , os termos associados a força normal dão origem à matriz de rigidez geométrica do sistema, expressa por K_g , e os termos $k_y^{(i)}$ e $k_{\varphi}^{(i)}$ geram uma matriz diagonal de rigidezes de mola, expressa por K_{mol} , que, adicionadas às matrizes de rigidez convencional e geométrica, permite determinar o equilíbrio do sistema, pois reflete as reações de apoio.

Se o sistema for hipostático, isto é, ter menos vínculos que os necessários para estabelecimento do equilíbrio, a matriz de rigidez das molas será tal que a obtenção das reações de apoio e deslocamentos não será possível. Essa formulação tem a vantagem de dispensar, na programação do método, o pivoteamento das matrizes de rigidez para explicitar os deslocamentos não prescritos que se deseja obter. Finalmente, os termos F_{y_i} e M_i determinam o vetor de

forças e momentos nodais diretamente aplicados aos nós, expresso por F_i^{ext} .

Então, para resolução do problema, as equações de equilíbrio determinadas com a minimização do funcional da energia potencial total aproximado permitiram a construção do seguinte sistema de equações:

$$\left(K_{ij} (d_j) + K_{gij} + K_{molij} \right) \cdot d_j - F_i^{ext} = 0 \tag{2.21}$$

Onde as matrizes, em sistema ao menos isostático, são tais que existe inversa para a matriz que resulta da soma $K_{ij} + K_{gij} + K_{molij}$ e d_j é o vetor de deslocamentos nodais, cujas entradas ímpares são os deslocamentos verticais dos nós e as entradas pares as suas rotações.

A solução do sistema, no caso linear elástico homogêneo, pode ser obtida então da seguinte forma:

$$d_i = \left(K_{ij} + K_{gij} + K_{molij} \right)^{-1} \cdot F_j^{ext} \tag{2.22}$$

Entretanto, a não-linearidade física do material será levada em consideração, de modo que o sistema deverá ser resolvido de forma iterativa, tratando a equação de equilíbrio como uma relação de recorrência tal que, em uma dada iteração m :

$$\begin{aligned}
 d_i^{(m+1)} = & \left(K_{ij} (d_i^{(m)}) + \right. \\
 & \left. K_{gij} + K_{molij} \right)^{-1} \cdot F_j^{ext}
 \end{aligned} \tag{2.23}$$

A convergência dos resultados será avaliada por meio da convergência do máximo deslocamento vertical em módulo obtido em cada iteração, sendo que, para uma dada tolerância, há convergência quando se verifica:

$$\max \left(\left| d_i^{(m+1)} - d_i^{(m)} \right| \right) < \textit{tolerância} \tag{2.24}$$

As solicitações podem ser definidas com auxílio da matriz de rigidez própria da estrutura (VENÂNCIO, 1975), de modo que, sendo S_i o vetor de solicitações internas em cada nó, deve-se verificar:

$$S_i = - \left(K_{ij} (d_i) + K_{gij} \right) \cdot d_j \tag{2.25}$$

Os deslocamentos de primeira ordem podem ser estimados, sabendo-se o campo de deslocamentos do

sistema d_j , em se resolvendo o sistema, mais uma vez, mas considerando-se o esforço normal como sendo nulo. Assim, pode-se escrever que:

$$d_j^{(1a\text{ ordem})} = \left(K_{ij} (d_j) + K_{mol_{ij}} \right)^{-1} \cdot F_j^{ext} \quad (2.26)$$

Com os deslocamentos de primeira ordem anteriormente calculados, é possível determinar as reações de primeira ordem segundo:

$$R_i^{(1a\text{ ordem})} = K_{mol_{ij}} \cdot d_j^{(1a\text{ ordem})} \quad (2.27)$$

Com os deslocamentos de primeira ordem anteriormente calculados, é possível determinar as solicitações solicitantes nodais de primeira ordem segundo:

$$S_i^{(1a\text{ ordem})} = - \left(K_{ij} (d_j) + K_{g_{ij}} \right) \cdot d_j^{(1a\text{ ordem})} \quad (2.28)$$

3 Obtenção da relação M-k

O funcional da energia potencial total, conforme apresentado em 2.15, é constituído de termos que dependem da rigidez flexional da seção do pilar. Assim, a obtenção da relação momento-curvatura (M-k) na seção permitirá definir esta rigidez necessária para se obter os campos de esforços e deslocamentos do pilar, de modo que se possa capturar, por meio dessa relação, o comportamento não-linear do concreto armado.

Para obtenção da relação M-k, devemos resolver as equações de equilíbrio estático em cada seção. Assim, duas equações de equilíbrio podem ser escritas: uma em forças na direção do eixo local x e outra em momentos, em torno do eixo local z (como disposto na Figura 1). Dessa forma, admitindo-se como incógnitas a posição da linha neutra a partir da face superior da seção e a curvatura da seção e sendo:

M – momento fletor na seção

P – força normal de compressão na seção

A_{si} – área da i -ésima armadura da seção

y_i – posição da i -ésima armadura da seção

X – posição da linha neutra a partir do topo da seção

b – largura da seção

h – altura da seção

A força de compressão no concreto é definida segundo a seguinte integral dupla na região comprimida:

$$F_c = \iint_A \sigma_c c dy dz = b \int_h \sigma_c (y) dy = b \int_{\frac{h}{2}-X}^{\frac{h}{2}} \sigma_c (y) dy \quad (3.1)$$

Assim como a força atuante na i -ésima armadura de aço:

$$F_{si} = \sigma_y (\varepsilon(y_i)) \cdot A_{si} \quad (3.2)$$

Sendo $\varepsilon(y_i)$ a deformação específica na armadura considerada

Admitindo-se um campo de deformações que atende à hipótese de Navier-Bernoulli da teoria de vigas clássica, isto é, que tenha uma distribuição linear na seção, tem-se a seguinte mudança de variáveis:

$$\varepsilon_x = -k \cdot \left(y - \left(\frac{h}{2} - X \right) \right) \quad (3.3)$$

onde $k = v_{,xx}$. Seja:

$$dy = - \frac{d\varepsilon_x}{k} \quad (3.4)$$

Isso equivale a desconsiderar a contribuição quadrática de segunda ordem que aparece na expressão de ε_x , assim como dado na equação 2.13, dado que essa considera o quadrado de rotações, que já são pequenas nos casos de estudo práticos. Tem-se então que:

$$F_c = b \left| \int_0^{kX} \frac{\sigma_c (\varepsilon_x(k)) d\varepsilon_x}{k} \right| \quad (3.5)$$

e o momento produzido por F_c , em módulo, dado por:

$$M_c = b \int_0^{kX} \left(\left(\frac{h}{2} - X \right) - \frac{\varepsilon_x}{k} \right) \frac{\sigma_c (\varepsilon_x(k)) d\varepsilon_x}{k} \quad (3.6)$$

que permitem escrever as equações de equilíbrio seguintes

Equilíbrio de forças:

$$P = F_c (k, X) - F_{sii} (k, X) \quad (3.7)$$

Equilíbrio de momentos:

$$M = M_c(k, X \cdot F_{si}(k, X)) \quad (3.8)$$

A resolução das equações de equilíbrio foi implementada em rotina Matlab auxiliar, por meio do método de Newton-Raphson, conforme disposto em ANTIA (2004), de modo que, para determinadas posições de linha neutra, calculou-se k que satisfizesse a equação 3.7, e, de posse desse valor, se pode determinar, com a equação 3.8, o momento equilibrante da seção. Assim, foi possível construir curvas de comportamento M-k.

As relações de tensão-deformação específica do aço e do concreto foram definidas conforme as curvas dispostas na NBR 6118:2014 no item 8. Cabe ressaltar que foram seguidas também as recomendações dispostas no item 15.3, a respeito da construção do diagrama em si.

4 Ajuste da relação M-k

Quando da busca de curvas de ajuste para as relações M-k que resultaram das análises das equações de equilíbrio, observou-se que a *logaritimização* dos dados de entrada, isto é, momentos e curvaturas, gerava curvas que obedeciam um comportamento aproximadamente linear, em alguns trechos, separados por inflexões.

Observou-se, ainda, que, para várias seções analisadas, os pontos de inflexão do diagrama estavam associados à plastificação de elementos constituintes da seção (feixes de armadura e concreto) conforme se verificava o incremento da carga. Há, portanto, tantos pontos possíveis de inflexão quanto forem os elementos plastificáveis da seção. Havendo, assim, N inflexões, haverá N + 1 trechos a analisar.

Para definição da curva de ajuste em cada trecho, logaritimizou-se o diagrama e, no espaço log, realizou-se um ajuste linear em cada trecho, segundo a expressão.

$$\ln(M(k)) = \tilde{a} \cdot \ln(k) + \tilde{b} \quad (4.1)$$

Equivalentemente, pode-se expressar essa relação, ainda, no espaço original $M \times k$ exponenciando ambos os lados da equação acima, de forma a obter:

$$M(k) = b \cdot k^a \quad (4.2)$$

Sendo $b = e^{\tilde{b}}$ e $a = \tilde{a}$. Ademais, usando que:

$$M(k) = EJ \cdot v_{,xx} = EJ \cdot k \quad (4.3)$$

Obtêm-se

$$EJ(k) = b \cdot k^{a-1} = b \cdot v_{,xx}^{a-1} \quad (4.4)$$

Essa expressão assimila uma relação tensão-deformação específica elástica, mas não linear. Assim, substituindo-se a relação 5.6 em 2.9 e aplicando-se a esta a equação de Lagrange, em uma dada região do pilar com parâmetros constitutivos a e b :

$$\frac{b \cdot a \cdot (a+1)}{2} v_{,xx}^{a-1} \cdot v_{,xxx} + P \cdot v_{,x} = C \quad (4.5)$$

Sendo C uma constante real. A derivação da equação 5.8 aporta, ainda, a relação seguinte:

$$(a-1) \cdot k^{a-3} \cdot k_{,x}^2 + k^{a-2} \cdot k_{,xx} + \frac{2 \cdot P}{b \cdot a \cdot (a+1)} = 0 \quad (4.6)$$

A resolução dessa equação diferencial permite obter o campo de deslocamentos no pilar de forma exata, considerando a relação momento-curvatura aproximada conforme o disposto neste trabalho. Dada a significância dessa equação para o fenômeno de estudo, bem como seu alto grau de complexidade e não-linearidade, o estudo matemático futuro dessa equação pode se tornar um facilitador do entendimento do comportamento de pilares de concreto armado. No caso elástico linear clássico, os parâmetros a e b são tais que $a = 1$, $EJ = b$ são constantes no pilar, e a equação se reduz a sua forma clássica, que pode ser encontrada em TIMOSHENKO (1985):

$$EJ \cdot k_{,xx} + P \cdot k = 0 \quad (4.7)$$

5 Pilar de Estudo

Considerar-se-á, para as análises aqui realizadas, um pilar de estudo com comprimento $L = 7,0 \text{ m}$, cuja seção é esquematizada na Figura 3. Esse está sujeito a um momento de primeira ordem de $M_{sd} = 30 \text{ kNm}$ em torno do eixo z , força de compressão de cálculo de $N_{sd} = 1100 \text{ kN}$ e tem armadura de $8 \phi 25 \text{ mm}$. Como $\lambda > 35$ é necessária a verificação das solicitações de segunda ordem no mesmo. Foi considerada

também a fluência do concreto, adotando-se um coeficiente de $\varphi = 2$.

Tabela 2 – Propriedades do pilar de estudo.

fck	35	MPa
fcd	25000	kPa
fyd	434783	kPa
Nsd	1100	kN
M1sd,z	30	kNm
b	0,45	m
h	0,3	m
L	7	m
d'	0,03	m
λ_z	80,829	
λ_y	53,886	
λ_1	35	

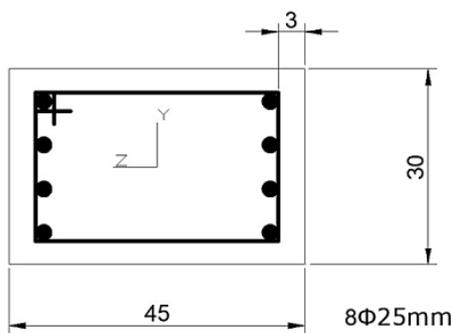


Figura 3 – Esquemática da seção do pilar.

6 Resultados do estudo da relação M-k

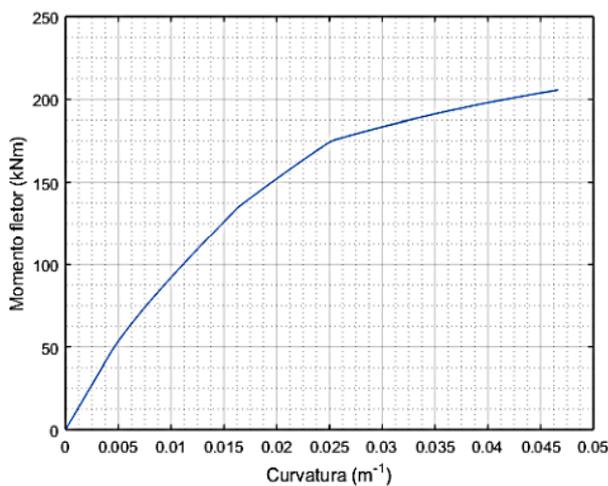


Figura 4 – Relação momento-curvatura do pilar.

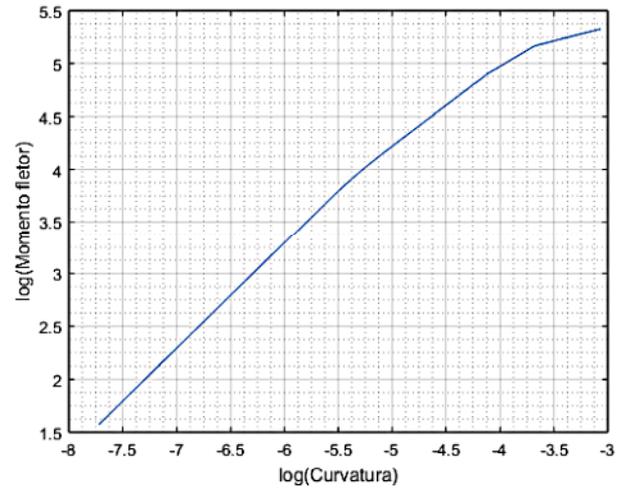


Figura 5 – Relação M-k no espaço logaritimizado.

Assim, procedendo-se ao ajuste da relação momento-curvatura, para a seção considerada, obteve-se:

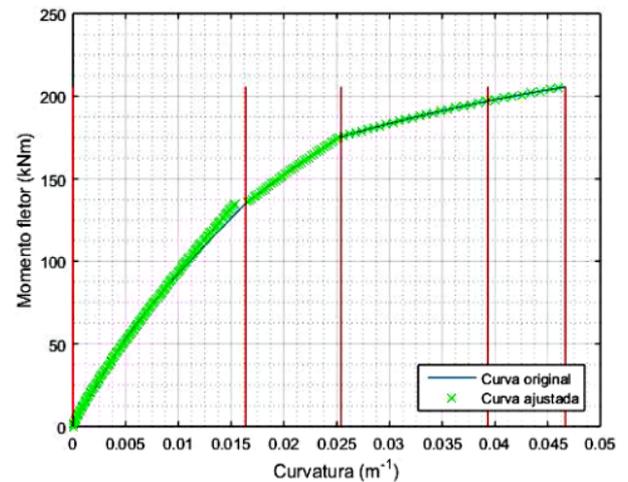


Figura 6 – Relações M-k original e ajustada.

Cujos parâmetros de ajuste são:

Tabela 2 – Parâmetros de ajuste para relação M-k do pilar.

Trecho	a	b	
1	0,851	4724,020	Trecho termina com a plastificação da armadura a $y = 10$ cm.
2	0,601	1597,990	Trecho termina com a plastificação da armadura a $y = -10$ cm
3	0,266	465,867	Trecho termina com a plastificação da fibra superior do concreto
4	0,247	439,081	Trecho termina com divergência da resposta do programa

Verifica-se, prontamente, que a rigidez da seção, associada ao parâmetro b , reduz com o aumento do número de elementos plastificados. A evolução das deformações em cada elemento da seção com o número de iterações do programa é apresentada no gráfico seguinte, com a formação dos trechos sendo indicada pelas linhas em vermelho.

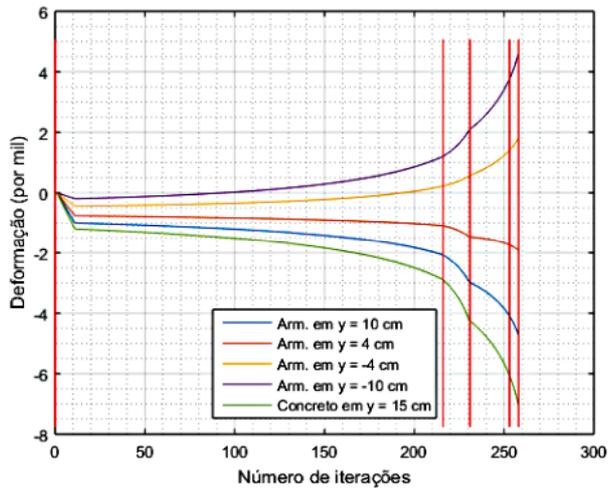


Figura 7 – Evolução das deformações na seção com o número de iterações.

7 Esforços e Deslocamentos: Resultados

Os seguintes resultados foram obtido com o programa desenvolvido em Matlab. Consideramos que o pilar é bi-apoiado, e sujeito aos esforços solicitantes tais quais descritos na Tabela 3, em flexão pura.

Tabela 3 – Esforços solicitantes de cálculo no pilar.

Esforços solicitantes		
Nsd	1100,000	kN
Msd1,0	30,000	kN
Msd1	30,000	kN

Os valores máximos das Figura 8 e Figura 10 são apresentados na Tabela 4. Podemos já constatar, no entanto, que o momento fletor máximo foi mais que dobrado em relação ao momento de primeira ordem, bem como os deslocamentos. Além disso, a flecha máxima é da ordem de 0,60% da altura total da coluna.

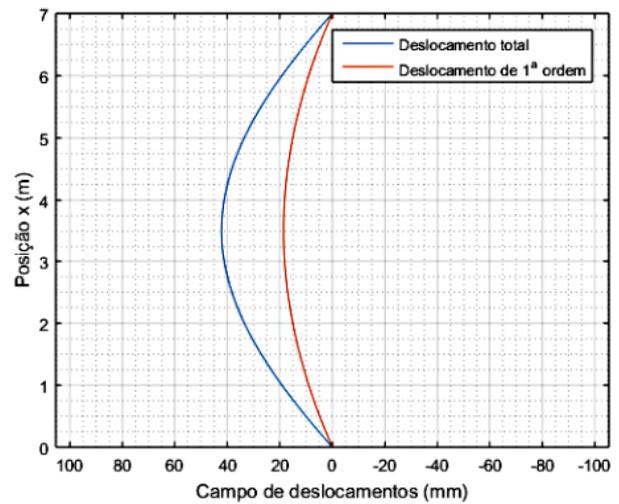


Figura 8 – Campo de deslocamentos transversais.

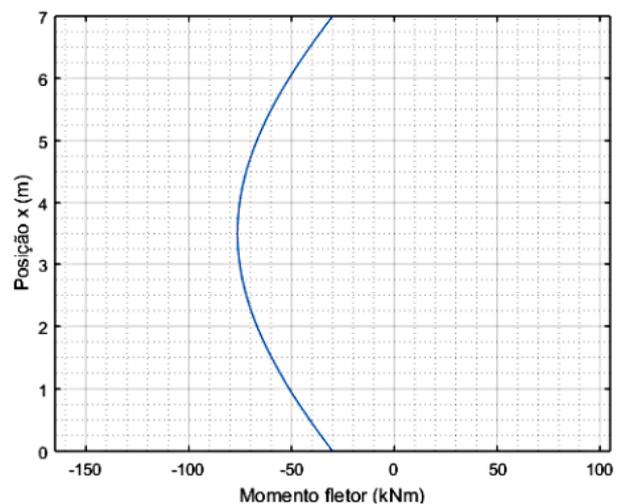


Figura 9 – Diagrama de momentos fletores.

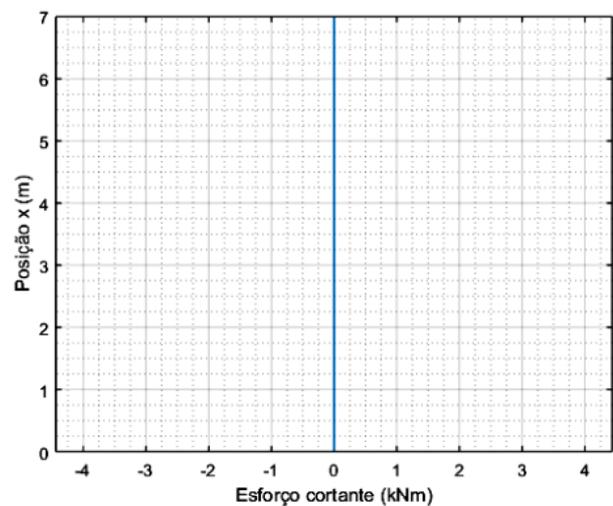


Figura 10 – Diagrama esforços cortantes.

8 Conclusões

A seguir tem-se as conclusões que puderam ser obtidas por meio desse trabalho.

A obtenção da relação M-k com resolução de uma equação de equilíbrio ao invés de duas (3.7 e 3.8) diretamente potencializa bastante os cálculos, com tempo de análise da máquina inferior a 1s. Desta forma, também são incorporados os efeitos da distribuição de armaduras na seção na resposta final da rigidez da seção, o que não é, a priori, destrinchado pelos métodos das curvatura e rigidez aproximadas, mais simplificados.

O ajuste da relação M-k definido conforme 4.2 revelou excelentes aproximações desta em cada um dos trechos manifestados no diagrama, associados à plastificação dos elementos da seção, conforme se pode ver na Figura 6. Essa forma de se entender a relação momento-curvatura na flexão simples reta, pode proporcionar novas formas de se formular esse tipo de problemas em pilares e, eventualmente, outras estruturas de concreto armado que demandem verificações de ordem mais alta. O ponto alto dessa observação é a equação de equilíbrio exata derivada com essa relação em 4.6, altamente não-linear mas que, porém, pode se tornar um objeto de pesquisa mais aprofundado dada a sua significância.

A abordagem de elementos finitos com auxílio da inserção de molas no pilar permite a simplificação da resolução do sistema, que dispensa o pivoteamento das matrizes de rigidez e vetores de força, e ainda permite considerar análises de segunda ordem com a presença de molas em pontos internos do pilar. Deste modo, o programa desenvolvido para a análise desses efeitos se torna mais robusto e de maior alcance, no sentido de que pode ser usado para se modelar outros elementos estruturais como estacas de fundação ou vigas em concreto armado.

Apresenta-se, também, os resultados para o valor do momento total solicitante segundo o método do pilar-padrão com curvatura aproximada e com rigidez aproximada, respectivamente. A NBR 6118:2014 no item 15.8.3.3 define esses métodos aproximados de avaliação dos efeitos de segunda ordem em pilares de concreto armado.

Tabela 4 – Quadro-resumo dos resultados.

Método de análise	Deslocamento máximo em mm	Momento fletor máximo em kNm
Programa via Elementos Finitos (MEF)	42,1	76,340
Pilar padrão com curvatura aproximada (CA)	82,7	119,833
Pilar padrão com rigidez aproximada (RA)	61,5	96,756

As análises em elementos finitos conduziram a resultados menos conservativos para o campo de deslocamentos e momentos fletores no pilar, vide a Tabela 5, que os da norma. Vale ressaltar que se considerou a fluência do concreto nestas análises, o que não é levado em consideração pelos métodos da norma aqui usados.

Tabela 5 – Quadro-resumo com discrepâncias relativas médias.

Discrepâncias relativas médias		
Método	Deslocamentos	Momentos
MEF e CA	65,1	44,3
MEF e RA	37,4	23,6
CA e RA	29,5	21,3

Finalmente, observamos que o uso de métodos variacionais para análise de problemas físicos pode se mostrar extremamente útil em suas análises, às vezes impossível de ser realizada de forma direta. Além disso, ele proporciona outros resultados que não são triviais de serem obtidas diretamente nestes problemas (como as equações de equilíbrio mesmas), os quais podem ser usados, eventualmente, para reinterpretar daqueles para se conseguir novas formas de solucioná-los. Como recomendação para trabalhos futuros, sugere-se algumas investigações:

- investigação matemática das propriedades da equação 4.6;
- investigar formas de ajuste mais refinadas para a relação M-k, dado que ajustes polinomiais no espaço logaritimizado se mostraram promissores;
- formulação variacional do campo de deslocamentos com auxílio de funções de aproximação no contínuo;
- análise de estabilidade no pilar a partir das propriedades da Equação 4.6;
- consideração de outras normas estrangeiras no desenvolvimento do programa em “Matlab”;

- construção de uma interface gráfica amigável para rotina desenvolvida em ambiente “Matlab”.
- extensão da formulação variacional incorporando as não linearidades para a flexão composta oblíqua.

9 Referências Bibliográficas

ABNT, NBR 6118:2014 – Projeto de estruturas de concreto – Procedimento, Rio de Janeiro, 2014.

ALVES, R. V., 1995, Instabilidade Não-Linear Elástica em estruturas reticuladas espaciais. Tese de D.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

ALVES, R. V., 2016, Notas de Aula do Curso de Métodos

Aproximados. Rio de Janeiro.

ANTIA, H. M., 1995, Numerical Methods for Scientists and Engineers. Delhi, Tata McGraw-Hill.

BUTKOV, E., 1973, Mathematical Physics. New York, Addison-Wesley.

MATHWORKS, 2016, MATLAB®.

ODGEN, R. W., 1997, Non-Linear Elastic Deformations. New York, Dover Publications.

SANTOS, S. H. C, 2016, Apostila de Concreto Armado III. Rio de Janeiro.

TIMOSHENKO, S. P., GERE, J. M, 1985, Theory of Elastic Stability. 2ª ed. London, McGraw-Hill.

VENÂNCIO, F. V., 1975, Análise Matricial de Estruturas. Rio de Janeiro, GB, Almeida Neves – Editores.

WASHIZU, K., 1975, Variational Methods in Elasticity and Plasticity. 2ª ed. Oxford, Pergamom Press.