

# Análise de Modelos para a Distribuição de Ações em Ponte Rodoviária Dotada de Múltiplas Vigas Utilizando Método dos Elementos Finitos

*Christian Donin<sup>1</sup>*  
*Gabriela Grützmacher Machado<sup>2</sup>*

## Resumo

O presente trabalho apresenta uma análise de estruturas em pontes, analisando a distribuição dos esforços na seção transversal de uma ponte, descrevendo métodos para a distribuição das diferentes ações nas pontes rodoviárias dotadas de múltiplas vigas, os métodos em análise são o Método de Engesser-Courbon, Guyon-Massonnet e o Método dos Elementos Finitos. Este estudo teve como objetivo aprimorar o conhecimento sobre esses métodos de distribuição das ações na seção transversal de uma ponte. Atualmente no Brasil as normas regulamentadoras vigentes não citam nenhum método de cálculo, tornando-se assim esse estudo imprescindível para a área de cálculo estrutural dessas grandes estruturas. Posteriormente ao estudo dos métodos, escolheu-se um modelo estrutural de ponte, este em múltiplas vigas e a esse modelo foi aplicado os métodos analisados, afim de que os mesmos fossem comparados. Os principais resultados são os valores resultantes das cargas de trem tipo simplificado e momento fletor positivo, sendo que os valores se mantiveram próximos em todos os resultados. Os resultados obtidos pelo Método dos Elementos Finitos mostraram-se mais significativos. Conclui-se por fim, que os objetivos propostos na concepção desse trabalho foram alcançados sendo que todos os resultados obtidos foram significativos. O método que melhor obteve resultados, sendo que este apresentou valores mais elevados sem superdimensionamento foi o Método dos Elementos Finitos que analisa a estrutura levando em conta sua modelagem tridimensional e parâmetros dos materiais.

**Palavras-chave:** análise de estruturas, pontes, métodos de distribuição, Método dos Elementos Finitos.

## 1 Introdução

Pontes com tabuleiro em vigas múltiplas em concreto armado e protendido possui sua utilização bastante difundida no Brasil, o estudo dessas obras de arte torna-se imprescindível por se tratar de estruturas especiais sujeitas a ações de cargas em movimento, além das cargas permanentes.

Atualmente existem vários métodos para a distribuição de ações na seção transversal de uma ponte, sendo que cada método tem suas características e particularidades. Entretanto, as normas brasileiras vigentes não citam nenhum desses métodos. A NBR 7188:2013, define a distribuição de cargas no tabuleiro de uma ponte, definindo a posição da carga móvel

rodoviária padrão TB – 450, porém como se realiza a composição destas cargas não é especificado.

O presente artigo apresenta uma análise de estruturas em ponte, analisa a distribuição dos esforços dinâmicos na seção transversal de uma estrutura em ponte padrão TB-450 em múltiplas vigas após a aplicação dos métodos de Engesser-Courbon, Guyon-Massonnet e Método dos Elementos Finitos (MEF). Nesse sentido, o estudo teve como objetivo aprimorar o conhecimento sobre esses métodos de distribuição das ações na seção transversal de uma ponte. Tendo em vista que atualmente no Brasil as normas vigentes não citam nenhum método de cálculo, tornando-se assim esse estudo imprescindível para a área de cálculo estrutural dessas grandes estruturas.

---

1 M. Sc. Professor da Universidade de Santa Cruz do Sul e Doutorando em Engenharia Civil, Universidade Federal de Santa Maria / PPGEC – e-mail: donin.eng@gmail.com  
2 Pós-graduada em Sistemas Estruturais e Construtivos, Universidade de Santa Cruz do Sul – e-mail: gabriela\_grutzmacher@outlook.com.br

## 2 Pontes em vigas

As pontes são grandes obras de arte especiais, assim denominadas pela engenharia, são estruturas de extrema importância para o desenvolvimento da infraestrutura de um país, gerando acessibilidade e conexões. De acordo com a NBR 7188:2013, ponte é a estrutura sujeita a ação de cargas em movimento, com posicionamento variável, denominados de carga móvel, utilizada para transpor um obstáculo natural, como rio, córrego, vale, entre outros.

A construção de pontes rodoviárias em múltiplas vigas é bastante utilizada no país, segundo Leonhardt (1979), citado por Machado (2015), as pontes em vigas classificam-se de acordo com seu sistema estrutural, podendo ser vigas sobre dois ou mais apoios, vigas sobre apoios com balaço, com vigas apoiados nos balanços (vigas Gerber), pilar com balanços e viga contínua. De acordo com Pucher (1961), a metodologia de cálculo de uma ponte em viga não se distingue do cálculo de vigas de um edifício que também pode apresentar momentos constantes ou variáveis em suas vigas. Nas estruturas das pontes o carregamento é dividido em permanente e móvel. A análise das cargas dinâmicas deve ser realizada por meio de variações na posição do trem tipo no tabuleiro, tanto na direção transversal quanto na longitudinal. A solicitação decorrente do trem tipo é calculada por meio de linhas de influência que resultam na combinação de cargas cortantes e momentos fletores.

## 3 Métodos de distribuição de ações

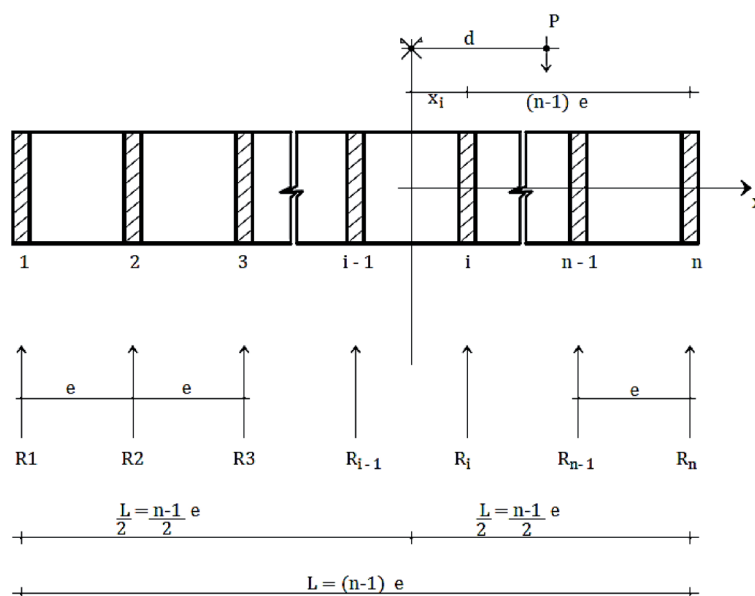
A distribuição transversal das cargas em pontes de múltiplas vigas ligadas entre si através de transversinas e pela laje superior, apresenta-se como uma grelha de malha ortogonal do qual seu cálculo é complexo e laborioso. Diversos métodos de cálculos aproximados foram desenvolvidos, com o intuito de contornar a dificuldade do problema e propor com mais ênfase a realidade do fenômeno físico do mesmo, (Mendes, 2003).

### 3.1 Método de Engesser – Courbon

Segundo Alves, Almeida, Judice (2004), o método de Engesser-Courbon considera além das hipóteses básicas relativas à teoria das estruturas, que as longarinas são paralelas, ligadas por transversinas de inércia constante. Despreza-se os efeitos torçores nesse método.

De acordo com Mendes (2003) o método de Engesser-Courbon considera infinita a rigidez da transversina que une as vigas principais, com isso esse método constitui-se em um caso extremo de distribuição transversal de cargas entre vigas. Sendo assim a deformada transversal sob uma carga atuante qualquer permanece sempre reta, sem inflexões e curvas.

Seguindo o que descreve Mendes (2003), ao tornar a reação provocada por uma carga genérica concentrada ( $P$ ), com excentricidade ( $d$ ) unitária, obtense então o coeficiente de repartição transversal ( $r_i, d$ ), a expressão é descrita como:



**Figura 01** – Desenho de esquema transversal elaborado pelo autor a partir das informações recolhidas de Mendes (2003).

$$r, d = \frac{1}{n} \left[ 1 + 6 \frac{2i - (n+1)}{n+1} \frac{d}{2} \right] \quad 1)$$

### 3.2 Método de Guyon-Massonnet

O método dos coeficientes de distribuição transversal é uma simplificação, apesar da forma laboriosa que se destina a prescindir do cálculo completo de uma grelha. Conforme Mendes (2003), “O desenvolvimento do Método Guyon-Massonnet encontra-se nas obras de Quiroga (1983) e de Martin (1981).”

Esse método baseia-se na substituição do tabuleiro real por uma laje ortótropa equivalente, assim sendo com as mesmas características de resistência médias, à flexão e torção.

Como descreve Alves, Almeida, Judice (2004), o método de Guyon-Massonnet baseia-se na teoria geral das lajes ortotrópicas, em que admite-se as seguintes hipóteses descritas na sequência: a espessura da placa é constante e pequena, relacionando-se com as demais dimensões; as deformações são elásticas obedecendo à lei de Hooke, os deslocamentos são pequenos em relação à espessura da laje; os pontos estão alinhados à superfície média da laje indeformada, encontram-se também linearmente dispostos em uma normal, situando-se na superfície média na configuração deformada; os pontos que se situam na superfície média da laje, deslocam-se apenas normalmente à mesma; as propriedades dos materiais são elásticas e constantes, podendo se diferir nas duas direções ortogonais.

Guyon e Massonnet buscaram solucionar o problema obtendo uma série de tabelas e gráficos, onde podem ser encontrados valores para os índices de repartição transversal  $X\varphi$  que depende dos seguintes parâmetros:

- i. coeficiente de travejamento  $\theta$ :

$$\theta = \frac{b}{L} \cdot \sqrt[4]{\frac{\rho x}{\rho y}} \quad 2)$$

onde

$b$  = a semi largura da placa equivalente;

$L$  = comprimento da placa equivalente;

- ii. parâmetro de torção  $\varphi$  definido na equação:

$$\varphi = \frac{\rho x + \rho y}{2 \sqrt{\rho x \rho y}} \quad (3)$$

- iii. posição da carga definida por sua excentricidade (fração da semi largura);
- iv. posição da viga que se quer obter o índice  $X\varphi$  (fração da semi largura);
- v. após a obtenção dos índices de repartição transversal, é possível a realização do estudo das longarinas, este pode ser realizado através do carregamento das direções transversal e longitudinal do tabuleiro. (Mendes, 2003);
- vi. de acordo com Mendes (2003), os parâmetros de rigidez à flexão e a torção que compõe os trabalhos tabulares objetivam a obtenção dos valores numéricos dos coeficientes de repartição transversal ( $n$ ). Cada viga tem sua linha de influência de reação de apoio própria, onde são definidos os coeficientes de repartição transversal para as vigas paralelas. Se a seção transversal não for simétrica, cada viga deverá possuir a sua linha de influência de reação de apoio, está pesquisada separadamente, visto que os coeficientes de repartição transversal são diferentes para cada viga.

### 3.3 Método dos Elementos finitos

Segundo Cunha (2012), citado por Donin (2015), a solução exata de problemas em estruturas com geometrias, condições de contorno e carregamentos complexos, não é solucionada por meio de procedimentos matemáticos tradicionais. Nesses casos torna-se imprescindível a aplicação de métodos aproximados de análise, como por exemplo os métodos numéricos computacionais.

Para Meek (1971), Venâncio Filho (1975), Brebbia e Ferrante (1975) e Assan (1999), citados por Donin (2015), o método dos elementos finitos trata-se de um método aproximado, subdivide o domínio em regiões discretas, conhecidas com elementos finitos. Estes elementos são compostos por nós em suas arestas, onde podem ser encontrados os deslocamentos e tensões, por meio de funções de interpolação, a base da aproximação do método.

## 4 Aplicação dos métodos

Para a realização dos cálculos o modelo de estrutura de ponte utilizado foi de uma ponte TB – 450 constituída por quatro vigas longitudinais principais (longarinas), essas vigas unidas por três vigas transversais (transversinas). As longarinas têm um vão de 20 m, seção transversal de 0,40 m x 2,00 m. As transversinas têm seção transversal de 0,40 m x 1,50 m.

Utilizou-se concreto C30,  $f_{ck} = 30$  MPa, módulo de elasticidade  $E_{cs} = 36.807,00$  MPa, esse definido conforme NBR 6118:2014.

#### 4.1 Aplicação dos métodos e definição do trem tipo de flexão

A partir da obtenção dos valores dos coeficientes

de repartição transversal conforme diretrizes da NBR 7188:2013, calculou-se o trem-tipo final e simplificado através do princípio de linhas de influência para as longarinas V1 e V2, como a estrutura da ponte é simétrica, os resultados de trem-tipo para  $V1 = V4$ , assim como  $V2 = V3$ . Após definida a linha de influência de reação de apoio para a viga em análise em cada método, realizaram-se análises dos cortes que passam

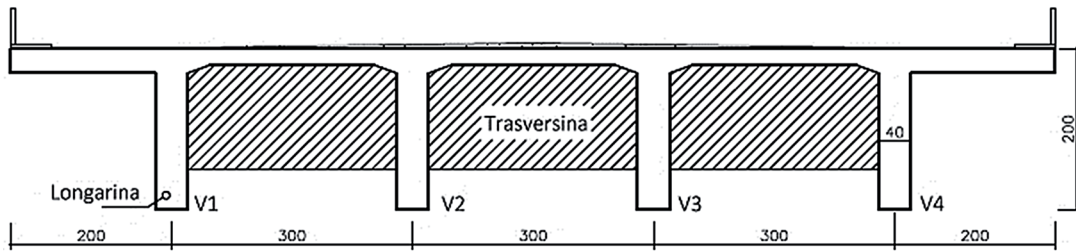


Figura 02 – Esquema transversal de ponte TB-450 (medidas em cm).

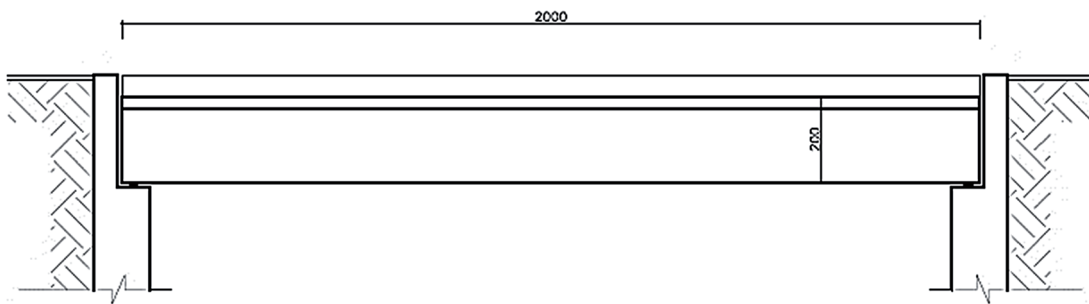


Figura 03 – Esquema longitudinal de ponte TB-450 (medidas em cm).

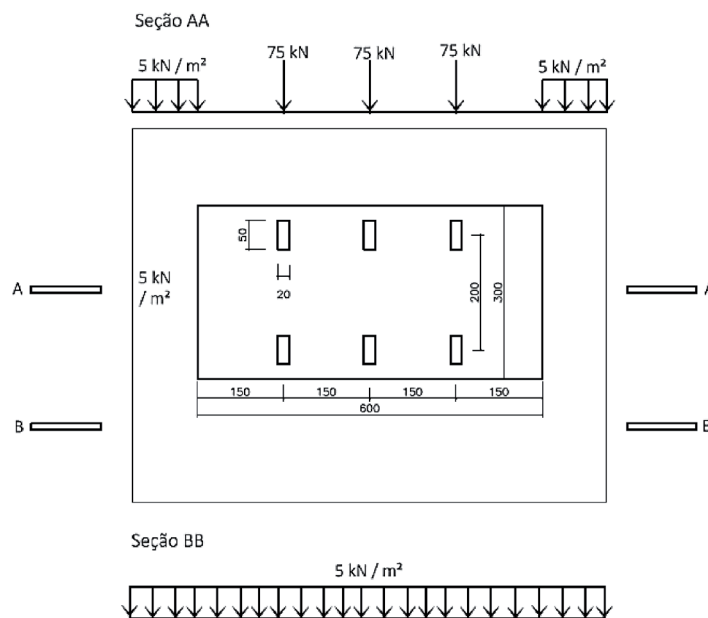


Figura 04 – Disposição de cargas veículo tipo padrão TB-450 conforme NBR 7188:2013.

dentro e fora da faixa do veículo-tipo com o tabuleiro carregado com as cargas móveis definidas pela NBR 7188:2013. Por fim, determinou-se o trem-tipo final longitudinal de flexão e por fim obteve-se o momento fletor positivo máximo para cada método analisado.

**4.1.1 Trem tipo de flexão método de Engesser-Courbon**

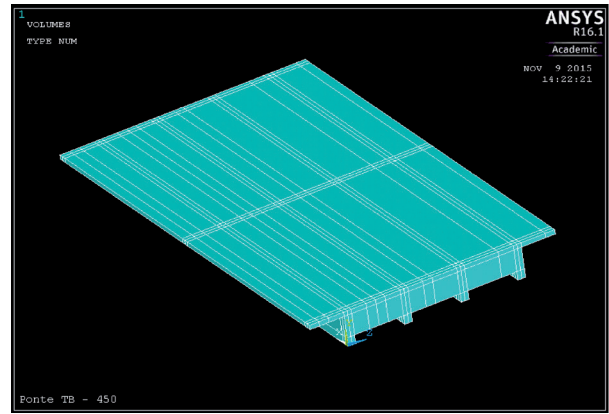
Para o cálculo do trem tipo simplificado considerou-se, conforme descrito anteriormente, infinita a rigidez da transversina que une as vigas principais (longarinas), como esse método despreza a torção, a partir da obtenção de parâmetros de rigidez a flexão, definiu-se os coeficientes de repartição transversal de cada longarina, a partir da aplicação de uma carga unitária em cada longarina, posteriormente foi traçada a deformada transversal reta, sem curvas nem inflexões. Após definida a linha de influência de reação de apoio para a viga em análise, realizou-se análises dos cortes que passam dentro e fora da faixa do veículo tipo com o tabuleiro carregado com as cargas móveis definidas pela NBR 7188:2013. Por fim determinou-se o trem tipo simplificado para cada longarina e realizou-se o cálculo do momento fletor positivo máximo.

**Tabela 01** – Trem Tipo Simplificado para Longarina V01 e V02 – Método de Engesser-Courbon

Cargas Trem Tipo	Longarina V01	Longarina V02
Carga de roda (3x) (kN)	84,00492	36,0063
Carga distribuida (kN/m)	18,063555	14,99973

**4.1.2 Trem tipo de flexão pelo método dos Elementos Finitos**

Para o cálculo do trem tipo via método dos Elementos Finitos utilizou-se um programa computacional de análise numérica, o Ansys versão estudantil APDL 16.1. O processo compreende basicamente o já descrito anteriormente, que é a obtenção dos coeficientes de repartição transversal a partir da aplicação de uma força  $P = 1\text{kN}$ , em cada longarina separadamente. Desta vez utilizando-se o Ansys como ferramenta de cálculo. Novamente, após definida a linha de influência de reação de apoio para a viga em análise, realizou-se análises dos cortes que passam dentro e fora da faixa do veículo-tipo com o tabuleiro carregado com as cargas móveis definidas pela NBR 7188:2013. Posteriormente determinou-se o trem tipo final simplificado e para cada longarina realizou-se o cálculo do momento fletor máximo.



**Figura 05** – Estrutura da ponte modelada através do programa de análise numérica Ansys.

**Tabela 02** – Trem Tipo Simplificado para Longarina V01 e V02 – Método dos Elementos Finitos

Cargas Trem Tipo	Longarina V01	Longarina V02
Carga de roda (3x) (kN)	93,7872	43,1959
Carga distribuida (kN/m)	19,5533	14,6718

**4.1.2 Trem tipo de flexão utilizando o Método de Guyon-Massonnet**

A seguir encontram-se os valores de trem tipo de flexão classe 45 da ponte rodoviária modelo em análise nesse trabalho. Esse cálculo encontra-se exemplificado na obra de Mendes (2003) e está descrito neste trabalho como base de análise comparativa aos trens tipo do Método de Engesser-Courbon e Método dos Elementos finitos. Os coeficientes de repartição transversal para as vigas estão calculados pelo método de Guyon-Massonnet-Rowe. O processo de obtenção das cargas do trem tipo simplificado procedeu os mesmos parâmetros dos anteriores.

**Tabela 03** – Trem Tipo Simplificado para Longarina V01 e V02 – Método de Guyon-Massonnet

Cargas Trem Tipo	Longarina V01	Longarina V02
Carga de roda (3x) (kN)	77,26	39,82
Carga distribuida (kN/m)	17,35	16,51

**4.2 Momento fletor máximo positivo**

A seguir encontram-se os valores obtivos através do cálculo de momento fletor máximo por meio

da aplicação das cargas de veículos tipo encontradas anteriormente no meio do vão das longarinas V01 e V02.

**Tabela 04** – Valores de momento fletor máximo positivo devido ao carregamento na longarina V01.

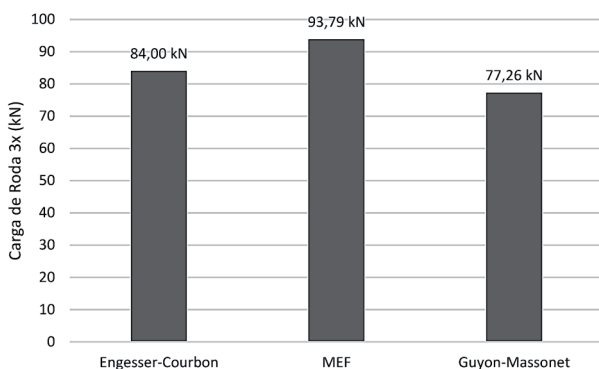
Método	Momento Fletor Positivo Máximo (kN.m)
Engesser – Courbon	3.383,28
MEF	3.725,96
Guyon – Massonnet	3172,808794

**Tabela 05** – Valores de momento fletor máximo positivo devido ao carregamento na longarina V02.

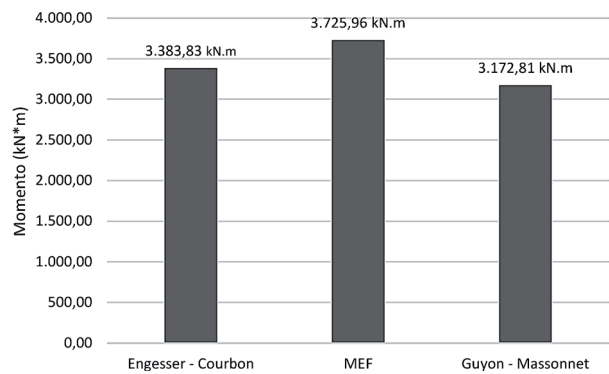
Método	Momento Fletor Positivo Máximo (kN.m)
Engesser – Courbon	2.052,76
MEF	2.186,72
Guyon – Massonnet	2.263,67

## 5 Análise Comparativa dos Resultados

A seguir encontram-se gráficos com os valores de trem-tipo de flexão, cargas de roda e carga distribuída respectivamente, e momento fletor máximo positivo obtidos para a longarina 1. Observa-se que nesse caso os valores resultantes para trem-tipo de flexão tanto de carga de roda quanto de carga distribuída de multidão para o método dos Elementos Finitos é superior aos demais métodos analisados.

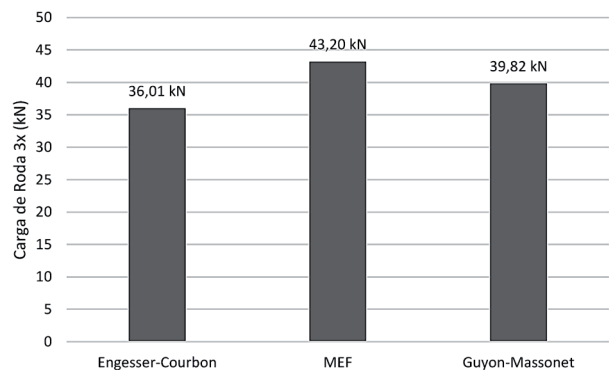


**Figura 07** – Valores de carga distribuída que compõe trem tipo da V01 para os diferentes métodos utilizados.

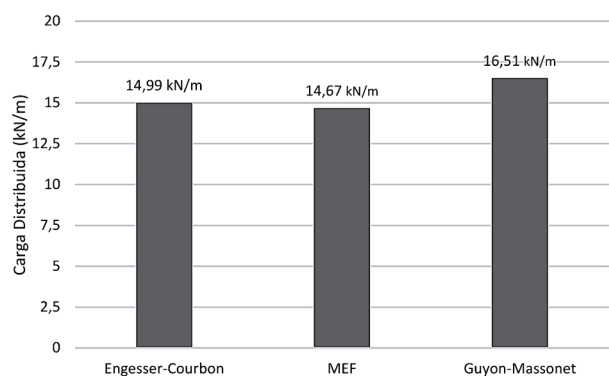


**Figura 08** – Momentos máximos positivos para V01.

Analisando-se os valores resultantes nota-se que o momento resultante do trem-tipo simplificado via método dos Elementos Finitos obteve maior valor. Da mesma forma, compararam-se os trens-tipo encontrados para os diferentes métodos, dessa vez os obtidos após carregamento da longarina 2.



**Figura 09** – Valores de carga de roda do trem tipo da longarina V02 para os diferentes métodos utilizados.



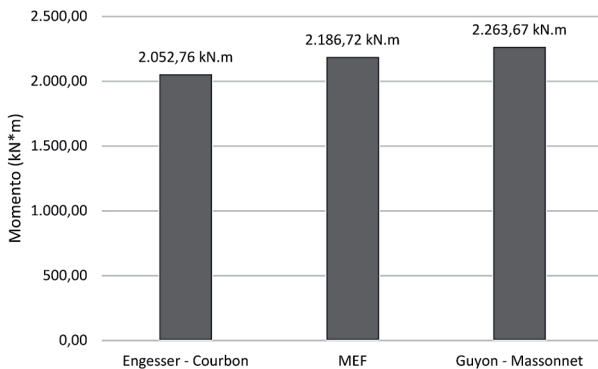
**Figura 10** – Valores de carga distribuída que compõe o trem tipo da V02 para os diferentes métodos utilizados.

Observando-se os gráficos, nota-se que a carga de roda que são as três cargas pontuais do Método dos Elementos Finitos resultaram em valores mais elevados que os restantes, principalmente em relação

ao método de Engesser-Courbon, porém para a carga distribuída, o Método de Guyon-Massonnet obteve maior resultado e o MEF obteve o menor valor. Isso se dá, pois os coeficientes de repartição obtidos para cada método são diferentes. A linha de influência para o método de Guyon-Massonnet não ultrapassa para valores positivos, seus coeficientes de repartição são todos valores positivos, com isso a carga distribuída de multidão de 5 kN/m se distribui ao longo de toda a ponte.

Nos outros métodos a linha de influência vai de valores positivos até valores negativos, tanto para o método de Engesser-Courbon quanto para MEF. Com isso a carga distribuída de multidão segue somente até onde a carga dos coeficientes de repartição transversais é positiva, resultando em uma área de carga distribuída inferior ao do método de Guyon-Massonnet.

Para os valores de momento fletor máximo positivo, observa-se que o valor do trem tipo via método de Guyon-Massonnet foi o mais elevado, pode-se dizer que isso se dá devido a sua carga distribuída de multidão ter valor mais elevado.



**Figura 11** – Momentos máximos positivos para V02.

Observa-se que o método de Engesser-Courbon obteve valores de momento fletor mais baixos que os demais, observa-se também que os valores obtidos não sofreram grandes variações.

## 6 Considerações finais

O presente trabalho buscou analisar e comparar diferentes métodos para a composição de cargas atuantes no tabuleiro de uma ponte rodoviária padrão TB-450. Por meio de um exemplo de ponte aplicou-se os métodos de Guyon-Massonnet, de Engesser-Courbon e o Método dos Elementos Finitos, para a determinação do trem-tipo de flexão e os momentos fletores máximos positivos para as longarinas da referida, sendo que para todos os métodos estudados os resultados se mostram satisfatórios, uma vez que todos

obtiveram valores aproximados, alcançando assim, o objetivo geral proposto inicialmente neste estudo.

A realização do estudo dessas grandes obras de arte é de grande importância para o aprendizado, contribuindo para a formação acadêmica, tendo em vista a importância e complexidade dessas estruturas. Ao longo deste trabalho, comprovou-se necessidade de construção de pontes, essas vencendo maiores vãos, possuindo maior esbeltez, exigindo dessa forma um elevado nível de conhecimento para o seu dimensionamento. Estruturas desse tipo são de grande importância ao país, pois fazem parte da infraestrutura de estradas, sendo destinadas a interligar cidades e construídas para o transporte de pessoas e bens de consumo.

Dessa forma, com base no estudo realizado, pode-se concluir que:

- a) para os resultados finais de momento fletor máximo positivo, o Método dos Elementos Finitos apresentou, sempre, para as duas longarinas resultados superiores. Visto que, este método considera o conjunto todo da estrutura da ponte, longarinas, transversinas e inclusive a laje, este tende a ser o modelo mais completo, portanto, com resultados mais confiáveis;
- a) com isso pode-se concluir que o MEF trata-se de um método mais preciso e principalmente a favor da segurança para o seu dimensionamento. O Método dos Elementos Finitos constatou ser capaz de resolver problemas complexos, através de um programa computacional, permitindo a modelagem real da estrutura levando em conta a sua geometria e propriedade dos materiais, obtendo assim resultados mais próximos do real.

O estudo realizado mostrou também que o método de Guyon-Massonnet leva em conta parâmetros de rigidez a flexão e a torção e o método de Engesser-Courbon leva em conta somente os parâmetros de rigidez a flexão, os resultados obtidos para estes métodos variaram de longarina para longarina, sendo que o método de Engesser-Courbon obteve os menores valores em ambos os casos analisados. Os resultados obtidos com a aplicação desses métodos teóricos podem ser utilizados, uma vez que como já descrito, apresentaram valores próximo, entretanto são métodos teóricos que não consideram parâmetros reais como o MEF.

## 7 Referências

ALVES, E. V.; ALMEIDA, S. M. F.; JUDICE, F. M. S. Métodos de análise estrutural de tabuleiros de pontes

em vigas múltiplas de concreto protendido. **Engevista**, Niterói, v. 6, n. 2, p. 48-58, ago. 2004.

ALVES, Eduardo Valeriano. Análise estrutural de pontes em vigas múltiplas de concreto protendido. 1994. Tese (Programa de Pós-Graduação de Engenharia) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 1994.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR 6120:1980 – Cargas para o cálculo de estruturas de edificações. Rio de Janeiro, 1980.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR 7187:2003 – Projeto de pontes de concreto armado e concreto protendido – Procedimento. Rio de Janeiro, 2003.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR 8681:2003 – Ações e segurança nas estruturas – Procedimento. Rio de Janeiro, 2003.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR 7188:2013 – Carga móvel rodoviária e de pedestre em pontes, viadutos, passarelas e outras estruturas. Rio de Janeiro, 2013.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR 6118:2014 – Projeto de estruturas de concreto – Procedimento. Rio de Janeiro, 2014.

CARRIL, R. S.; LOPES, V. M. F. Métodos aproximados de distribuição de esforços na seção transversal de pontes rodoviárias. Comparação com métodos mais exatos. (19--?).

DONIN, Christian. Curso de introdução à análise de estruturas via Método dos Elementos Finitos utilizando o programa Ansys. Santa Cruz do Sul: Universidade de Santa Cruz do Sul, 2015.

EL DEBS, M. K.; TAKEYA, T. Introdução às pontes de concreto. Texto provisório de apoio à disciplina SET – 412 – Universidade de São Paulo, São Carlos, 2007.

EL DEBS, Mounir Khalil. Concreto pré-moldado: fundamentos e aplicações. São Carlos: EESC – USP, 2000.

LEONHARDT, Fritz. Construções de Concreto. Princípios básicos de construção de pontes de concreto – Vol. 6. Rio de Janeiro: Interciência, 1979.

MACHADO, Gabriela Grützmacher. Análise de modelos para a distribuição de ações em pontes rodoviárias de seção transversais dotadas de múltiplas vigas. 2015. Trabalho de conclusão de curso (Curso de Engenharia Civil) – Universidade de Santa Cruz do Sul, Santa Cruz do Sul, 2015.

PUCHER, A. Concreto armado: fundamentos e aplicação em estruturas e pontes. Rio de Janeiro: GLOBO, 1961.

SÜSSEKIND, José Carlos. Curso de análise Estrutural. 6ª Ed. Rio de Janeiro: Globo, 1981.

TIMERMAN, J.; BEIER, M. Considerações sobre a revisão da ABNT NBR 7188. Associação Brasileira de Engenharia e Consultoria Estrutural, 2012.