Hiperestático de Protensão em Vigas Contínuas por Meio do Método das Cargas Nodais Equivalentes

Thiago Cunha da Silva[1]
Emil de Souza Sánchez Filho[2]

Resumo

Estuda-se nesse artigo o efeito do hiperestático de protensão em vigas contínuas, apresentando-se um novo método para o cálculo do hiperestático de protensão em vigas contínuas protendidas. Esse método baseia-se no conceito de carga nodal equivalente aplicado na determinação dos termos de carga utilizados para transformar o carregamento externo em carregamento nodal equivalente na análise matricial de estruturas e no método dos elementos finitos. É realizado um estudo de sua aplicação de forma analítica para vigas de dois, três e quatro vãos, analisando-se o efeito do hiperestático de protensão. A protensão na viga é arbitrada de forma indeterminada, afim de tornar os resultados mais gerais possíveis. É realizada uma comparação entre os resultados obtidos com um exemplo analítico, que revelou concordância entre os resultados analisados, comprovando sua eficiência. Comparou-se o método proposto com outros métodos usualmente empregados, onde o resultado obtido foi satisfatório. Foi criada uma rotina baseada na análise matricial de estruturas com o *software* Mathcad para a determinação dos termos de carga do método das cargas nodais equivalentes. Optou-se pela utilização desse *software*, pois permite a obtenção analítica de quaisquer termos utilizados sem a necessidade de ter que atribuir valores reais, o que torna o estudo mais amplo, podendo ser utilizado em qualquer situação.

Palavras-chave: concreto protendido, hiperestático de protensão, viga contínua.

1 Introdução

O efeito do hiperestático de protensão altera o diagrama de momentos de flexão resultante em uma viga, além de originar o efeito da força cortante hiperestática. Essa alteração modifica as tensões nas seções da estrutura, o que pode gerar a formação de fissuras ou o excesso de compressão do concreto prejudicando a sua vida útil, conforme relatado em Emerick (2005) e Pfeil (1984).

O problema na definição do hiperestático de protensão consiste na determinação de sua magnitude. O hiperestático, por vezes, é definido de forma imprecisa em função das perdas de protensão que ocorrem ao longo dos traçados dos cabos e na dificuldade de adicionar esse efeito nos métodos de cálculo usuais. Os métodos mais utilizados para cálculo do hiperestático de protensão são o método da flexibilidade e o método das cargas equivalentes.

O método da flexibilidade requer o cálculo de todos os termos da matriz de flexibilidade do elemento, além de realizar a sua inversão, o que pode ser muito trabalhoso, dependendo do diagrama de momentos isostáticos da estrutura e do grau de hiperestaticidade da mesma.

O método das cargas equivalentes proposto por Guyon (1953), embora seja um dos mais utilizados, traz consigo a dificuldade de se arbitrar com precisão a carga equivalente atuante na estrutura. Kong (2004) apresentou um método de cálculo do hiperestático de protensão que consiste na determinação das linhas de influência por meio de carga e momento unitários, contudo, esse método é de difícil aplicação.

O método proposto neste artigo apresenta simplicidade de aplicação, podendo-se considerar as perdas de protensão que ocorrem ao longo da estrutura, levando a uma melhor precisão dos resultados.

1 Engenheiro civil, M. Sc. UFF – Universidade Federal Fluminense, email: thiagocunha0307@gmail.com
2 D. Sc. Professor titular da Universidade Federal Fluminense, email: emilsanchez@uol.com.br

2 Forças Nodais Equivalentes

Para a aplicação do método proposto é necessário que os efeitos da carga de protensão sejam transformados em forças nodais equivalentes. A dedução da força nodal equivalente é semelhante à dedução dos momentos de engastamento perfeito em uma barra biengastada.

Considera-se um elemento de barra biengastado protendido e aplica-se o método da flexibilidade para a obtenção dos termos de carga. A Figura 1 ilustra, de forma genérica, o elemento de barra protendido.

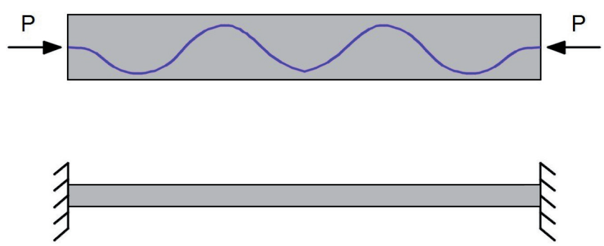

***Figura 1** – Barra biengastada sujeita à protensão.*

A fim de tornar o método utilizável para qualquer configuração de traçado admite-se que o cabo ao longo do elemento de viga tenha uma configuração indeterminada, produzindo um diagrama de momento de flexão não uniforme. A reação vertical é desconsiderada nos cálculos, pois não existe carga vertical devida à protensão atuando na estrutura.

A dedução das forças nodais equivalentes é obtida por meio do método da flexibilidade desconsiderando o efeito do empenamento. A Figura 2 apresenta o diagrama de momentos de flexão oriundo da protensão. Sua característica não uniforme busca representar que o método pode ser utilizado para qualquer configuração resultante do diagrama de momento de flexão isostático.

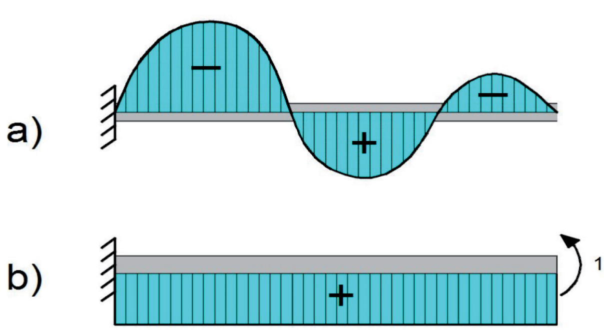

***Figura 2** – Aplicação do método da flexibilidade para obtenção das forças nodais: a) diagrama de momento de flexão isostático devido à protensão; b) diagrama do momento de flexão devido à carga virtual.*

Utilizando-se o método da flexibilidade e admitindo-se que a rigidez à flexão é constante ao longo da estrutura, tem-se:

$$\Delta_{11} = \int_0^L \frac{\bar{m}\bar{m}}{EI}\,dx = \frac{L}{EI} \tag{1}$$

$$\Delta_{10} = \int_0^L \frac{m\bar{m}}{EI} = \frac{\int_0^L Pz(s)\,ds}{EI} \tag{2}$$

que reunidos na equação de compatibilidade

$$\Delta_{1,0} + x_1\,\Delta_{1,1} = 0 \tag{3}$$

resulta em:

$$x_1 = -\frac{\int_0^L Pz(s)\,ds}{L} \tag{4}$$

onde

m – momento de flexão devido à protensão;

$\bar{m}$ – momento de flexão devido à carga unitária;

P – força de protensão aplicada;

L – comprimento do vão;

EI – rigidez à flexão do vão;

Δ_{10} – deslocamento devido à carga aplicada;

Δ_{11} – deslocamento devido à carga unitária;

$z(s)$ – cota do cabo de protensão.

O termo x_1 é a força nodal equivalente para a situação de engastamento perfeito da barra sujeita à protensão. Optou-se por colocar o termo referente à protensão em função de seu traçado devido às diversas configurações que o traçado de protensão pode vir a ter. A Figura 3 apresenta a carga nodal equivalente de protensão num elemento de barra.

***Figura 3** – Carga nodal equivalente de protensão.*

Esse método torna mais simples a análise do hiperestático de protensão, pois a protensão é substituída por um conjunto de cargas nodais equivalentes, o que possibilita a sua aplicação com maior facilidade em programas computacionais, além de poder levar em conta efeitos como o empenamento da seção.

A orientação da carga nodal é função da parcela $\int_0^L \mathrm{Pz}(\mathrm{s})\mathrm{ds}$. Se essa for positiva a orientação será igual à apresentada na Figura 3, caso contrário a orientação será no sentido oposto. Essa parcela é a área compreendida entre o centroide da seção e o cabo de protensão, que pode ser obtida por meio de qualquer *software* de desenho.

A estratégia para se utilizar esse método consiste em dividir a viga em seções, calcular a área compreendida entre o cabo de protensão e o centroide em cada seção e multiplicá-la pela força de protensão média da seção considerando-se as perdas de protensão.

A Figura 4 apresenta a estratégia para utilizar o método, considerando uma viga protendida simétrica de dois vãos com protensão ativa em ambas as extremidades.

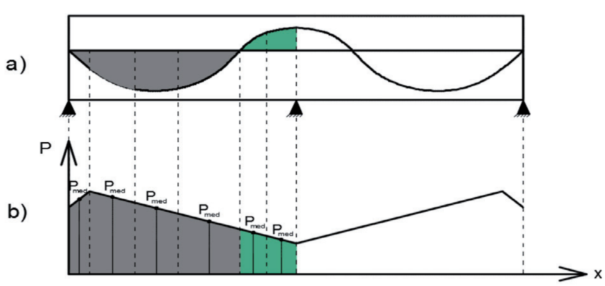

Figura 4 *– Método da carga nodal equivalente para cálculo do hiperestático de protensão: a) viga protendida simétrica; b) força de protensão atuante na estrutura.*

Multiplica-se a área compreendida entre o centroide e o cabo de protensão pela carga média P_{med} de protensão atuante na seção. Quanto maior for o número de seções mais preciso é o resultado.

Deve-se atentar ao sinal das áreas ao se somar a contribuição de cada seção, pois a área compreendida abaixo do centroide (área cinza) é positiva e a área compreendida acima do centroide (área verde) é negativa. Após o somatório deve-se dividir o resultado pelo comprimento do vão, obtendo-se o momento atuante nas suas extremidades.

Com os momentos aplicados na estrutura obtém-se as reações de apoio internas, que são os hiperestáticos. Deve-se em seguida aplicá-los como cargas concentradas, removendo-se os vínculos internos, deixando-se somente os apoios de extremidade. Daí tem-se assim o diagrama de momentos de flexão hiperestático.

Observa-se que a carga nodal equivalente, além de facilitar análises mais complexas, apresenta-se como parâmetro para avaliar a influência que o hiperestático de protensão tem na estrutura. Por se tratar do cálculo da área entre o centroide e o cabo, vigas que tenham o traçado concordante, ou seja, com o somatório das áreas nulo, não geram hiperestático de protensão. Os cabos retilíneos apresentam uma maior influência do hiperestático de protensão na estrutura, por terem uma área maior entre o cabo de protensão e o centroide da estrutura.

3 Viga Contínua de Dois Vãos

Os exemplos que seguem analisam, exclusivamente, o efeito do hiperestático de protensão em vigas contínuas, sendo o efeito da protensão substituído pelo conjunto de cargas nodais equivalentes. A Figura 5 mostra os parâmetros estudados.

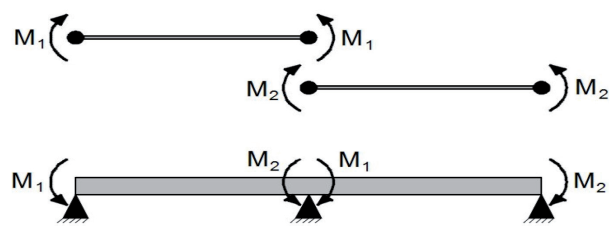

Figura 5 *– Viga contínua de dois vãos.*

Para facilitar a apresentação dos hiperestáticos admite-se que o comprimento dos vãos são iguais, assim:

$$L_1 = L_2$$

$$\int_0^{L_1} \mathrm{Pz}(\mathrm{s})\mathrm{ds} = \int_0^{L_2} \mathrm{Pz}(\mathrm{s})\mathrm{ds}$$

Admite-se que o traçado do cabo de protensão seja igual em ambos os vãos, isto é, a integral do momento ao longo do elemento de barra é igual nos vãos.

Os momentos M_1 e M_2 são dados pela força nodal equivalente, sendo:

$$M_1 = \frac{\int_0^{L_1} Pz(s)\,ds}{L_1} \tag{5}$$

$$M_2 = \frac{\int_0^{L_2} Pz(s)\,ds}{L_2} \tag{6}$$

Procedendo-se com os cálculos do hiperestático de protensão, que é a reação vertical do apoio intermediário que restringe a livre deformação da viga tem-se:

$$x_1 = -3\frac{\int_0^L Pz(s)\,ds}{L^2} \tag{7}$$

A parcela $\int_0^L \mathrm{Pz}(\mathrm{s})\mathrm{ds}$ é referente a um vão da estrutura. Sendo essa parcela igual para ambos os vãos, basta calculá-la apenas para um deles. O valor negativo do hiperestático significa que tem sua orientação no sentido negativo do eixo, conforme ilustra a Figura 6.

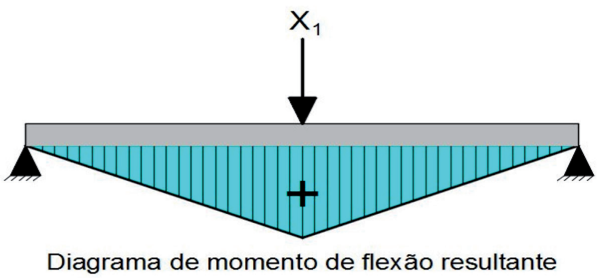

***Figura 6** – Efeito do hiperestático de protensão em viga contínua de dois vãos.*

O momento resultante de protensão em cada seção é dado pela soma do momento isostático de protensão com momento hiperestático de protensão

$$M_p = M_p^{isos} + M_p^{\mathrm{hiper}} \tag{8}$$

4 Viga Contínua de Três Vãos

A Figura 7 mostra uma viga protendida para a qual admitem-se as mesmas hipóteses do item anterior, ou seja, comprimentos iguais em todos os vãos e traçados dos cabos de protensão iguais em todos os vãos.

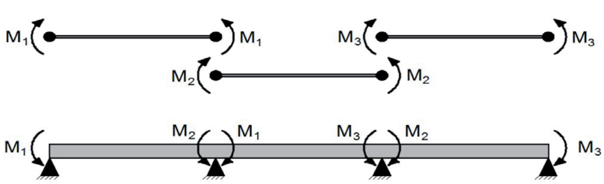

***Figura 7** – Viga contínua de três vãos.*

De forma análoga à expressa no item 3, calculam-se as reações de apoio para se obter os hiperestáticos de protensão, seguindo-se:

$$x_1 = -\frac{6\int_0^L Pz(s)\,ds}{5L^2} \tag{9}$$

$$x_2 = -\frac{6\int_0^L Pz(s)\,ds}{5L^2} \tag{10}$$

Verifica-se que:

$$x_1 = x_2$$

O valor negativo do hiperestático significa que ele tem sua orientação no sentido negativo do eixo (Figura 8).

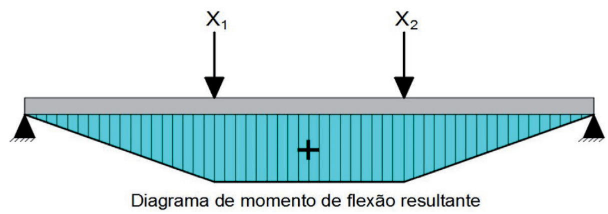

***Figura 8** – Efeito do hiperestático em viga contínua de três vãos.*

5 Viga Contínua de Quatro Vãos

A Figura 9 ilustra uma viga contínua protendida para a qual, seguindo-se a mesma sistemática dos itens anteriores, admitem-se as mesmas hipóteses, ou seja, comprimentos iguais em todos os vãos e traçado dos cabos de protensão iguais em todos os vãos.

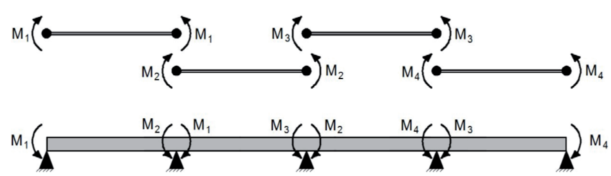

***Figura 9** – Viga contínua de quatro vãos.*

De forma análoga à expressa anteriormente calculam-se as reações de apoio para se obter os hiperestáticos de protensão, seguindo-se:

$$x_1 = -\frac{12\int_0^L Pz(s)\,ds}{7L^2} \tag{11}$$

$$x_2 = \frac{6\int_0^L Pz(s)\,ds}{7L^2} \tag{12}$$

$$x_3 = -\frac{12\int_0^L Pz(s)\,ds}{7L^2} \tag{13}$$

Verifica-se que $x_1 = x_3$ e que $x_2 = - x_1/2$.

Os hiperestáticos de protensão atuam na estrutura conforme ilustra a Figura 10. Verifica-se que nesse caso ocorre a inversão de sentido no hiperestático no apoio central, o que reduz o momento hiperestático de protensão na estrutura.

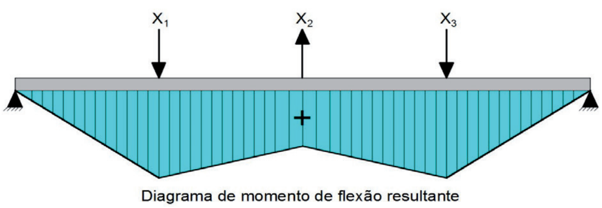

Figura 10 *– Efeito do hiperestático em viga contínua de quatro vãos.*

Ressalta-se que nos exemplos apresentados foram ilustrados somente o diagrama de momentos de flexão. Entretanto, pode-se utilizar o resultado dos hiperestáticos para obter a força cortante hiperestática atuante na estrutura.

6 Exemplos Numéricos

Para se avaliar a precisão do método proposto, utilizou-se o resultado do hiperestático obtido no item 3 comparado com o exemplo 15.4 de Raju (2013). Nesse exemplo a viga contínua de dois vãos tem comprimento L = 10 m em cada vão, excentricidade e = 100 mm (Figura 11). Daí tem-se o hiperestático de protensão R = 2Pe/L.

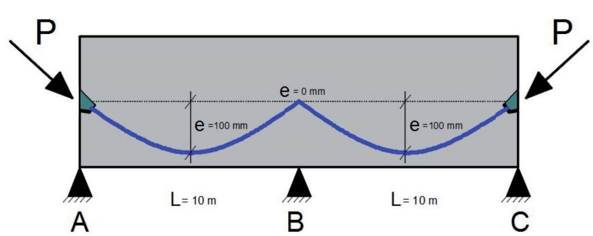

Figura 11 *– Exemplo de viga contínua; adaptado de Raju (2013).*

Para se calcular o hiperestático é necessário obter a equação do cabo de protensão. Esse tem a forma do diagrama isostático do momento de flexão submetido a uma carga uniformemente distribuída. A equação do cabo em cada vão é obtida por meio do método da carga equivalente, resultando numa equação do tipo:

$$M\left(x\right) = \frac{qL}{2}x - \frac{q}{2}x^2$$

onde:

$$q = \frac{8\,Pe}{L^2}$$

Substituindo-se no hiperestático de protensão obtido no item 3 tem-se:

$$x_1 = -3\frac{\int_0^L Pz\left(x\right)dx}{L^2}$$

$$x_1 = -3\frac{\int_0^L \left(\frac{qL}{2}x - \frac{q}{2}x^2\right)dx}{L^2}$$

Simplificando-se e substituindo-se o termo de q seguem-se:

$$x_1 = -\frac{3}{L^2}\frac{8Pe}{L^2}\frac{L^3}{12}$$

$$x_1 = -\frac{2\,Pe}{L}$$

O fato do termo x_1 ser negativo indica que o hiperestático tem como orientação o mesmo sentido apresentado na Figura 6 do item 3. Para o traçado de protensão retilíneo, com uma excentricidade e constante ao longo da viga, o hiperestático de protensão fica:

$$x_1 = -3\frac{\int_0^L Pz\left(x\right)dx}{L^2}$$

$$x_1 = -3\frac{\int_0^L Pedx}{L^2}$$

$$x_1 = -3\frac{Pe}{L^2}$$

$$x_1 = -3\frac{Pe}{L}$$

Verifica-se que o efeito do hiperestático de protensão é mais acentuado em função da maior área entre o cabo de protensão e o centroide da seção. Esse resultado está de acordo com o que foi apresentado no item 2.

Apresenta-se como exemplo uma viga protendida simétrica de três vãos. Cada vão tem comprimento L = 10 m. A força de protensão aplicada é P = 1000 kN, constante ao longo da viga; a seção é retangular de dimensões 60 × 150 cm (Figura 12).

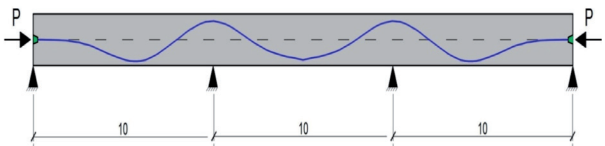

Figura 12 *– Exemplo de viga contínua de dois vãos protendida, medidas em metros.*

Calcula-se o hiperestático de protensão pelo método da carga distribuída equivalente comparando-se o resultado obtido com o método proposto neste artigo. A Figura 13 mostra os parâmetros utilizados para a determinação da carga distribuída equivalente.

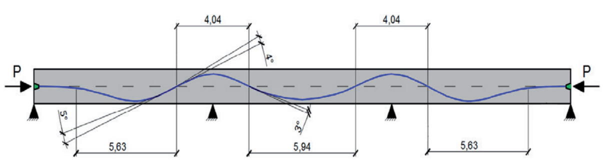

Figura 13 *– Parâmetros utilizados para o método da carga distribuída equivalente, medidas em metros.*

A carga distribuída pode ser aproximada para pequenos ângulos considerando-se a componente vertical da força de protensão como sendo constante:

$$q = \frac{Psen\left(\varphi\right)}{L}$$

$$q_1 = \frac{1000\,.\,sen5°}{5,63} = 15,48\,kN/m$$

$$q_2 = \frac{1000\,.\,sen4°}{4,04} = 17,27\,kN/m$$

$$q_3 = \frac{1000\,.\,sen3°}{5,94} = 8,81\,kN/m$$

Afim de facilitar sua determinação, as cargas foram obtidas de forma aproximada, considerando-se apenas três trechos ao longo da estrutura. A Figura 14 mostra a aplicação do método.

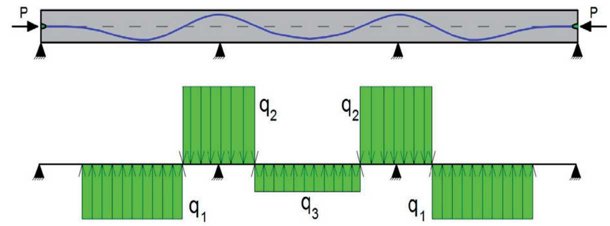

Figura 14 *– Aplicação do método da carga equivalente.*

A Figura 15 apresenta o resultado do diagrama de momentos hiperestáticos de protensão devidos à carga distribuída equivalente.

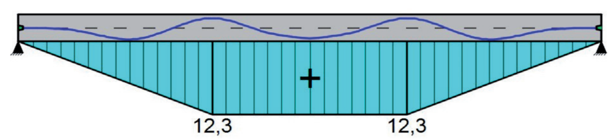

Figura 15 *– Diagrama do hiperestático de protensão pelo método da carga equivalente, medidas em kN.m.*

Utilizando-se o método proposto neste artigo calculam-se as áreas entre o cabo de protensão e o centroide da estrutura. As áreas em cada vão estão apresentadas na Figura 16.

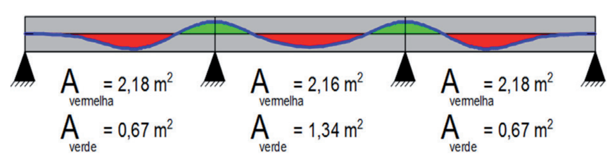

Figura 16 *– Áreas entre o cabo de protensão e o centroide da seção.*

O cálculo das cargas nodais equivalentes em cada vão é dado pela equação 4, seguindo-se:

$$M_1 = -\frac{\left(2,18 - 0,67\right).1000}{10} = -151\;kN\,.\,m$$

$$M_2 = -\frac{\left(2,16 - 1,34\right).1000}{10} = -82\,kN\,.\,m$$

$$M_3 = M_1$$

A Figura 17 mostra a aplicação do método proposto e o resultado dos momentos hiperestáticos de protensão atuantes na viga.

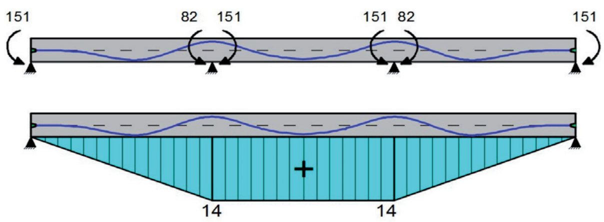

Figura 17 – *Diagrama do hiperestático de protensão pelo método da carga nodal equivalente, medidas em kN.m.*

Verifica-se que os resultados obtidos por ambos os métodos são bem próximos, com diferença inferior a 14%. Essa diferença pode ser atribuída às aproximações realizadas no método das cargas equivalentes, pois a determinação precisa da carga equivalente que atua na estrutura é de difícil solução. Pode-se afirmar que o método proposto representa melhor a real magnitude do hiperestático de protensão, pois não houve aproximações relevantes em sua aplicação.

Utilizando-se o método da flexibilidade para o cálculo dos hiperestáticos de protensão tem-se os mesmos resultados para os hiperestáticos obtidos nos itens 3, 4 e 5, o que confirma a eficiência do método proposto.

Entretanto, deve-se ter cautela para o cálculo do termo $\int_0^L Pz(s)ds$, pois o seu sinal é quem determina a orientação do hiperestático de protensão.

Esse método torna o cálculo de vigas contínuas protendidas mais simples, com sua fácil programação, tendo como variáveis o traçado do cabo de protensão e a força de protensão atuante em cada seção.

7 Conclusões

O método para cálculo de estruturas protendidas hiperestáticas por meio da carga nodal equivalente apresentou boa consistência e facilidade de aplicação. Essa técnica, comparada com as demais normalmente utilizadas, mostra facilidade de aplicação para qualquer grau de indeterminação da estrutura, facilitando inclusive análises mais complexas.

Verifica-se que o hiperestático de protensão tem seu valor influenciado basicamente pelo comprimento do vão da viga, que reduz seu efeito, e pela parcela $\int_0^L Pz(s)dx$, que é a área entre o cabo de protensão e e o centroide da seção multiplicado pela força de protensão, que amplifica seu efeito.

Caso seja necessário eliminar o efeito do hiperestático de protensão deve-se modificar o traçado do cabo, tentando-se buscar a sua concordância, ou seja, que a parcela $\int_0^L Pz(s)dx$ seja nula.

Referências Bibliográficas

AMORN, Wilast; TUAN, Christopher Y; TADROS, Maher K. Curved, Prescast, Pretensioned Concrete I-Girders Bridges, Civil Engineering Faculty Publications, 2008.

COHN, M. Z; FROSTING, Y. Ineslastic Behaviour of Continuous Prestressed Concrete Beams. Journal of Structural Engineering, vol. 109, nº 10, October, 1983.

EMERICK, Alexandre Anozé. Projeto e execução de lajes protendidas. Editora Interciência, Rio de Janeiro, 2005.

GUYON, Y; Prestressed Concrete, vols. 1 and 2, Contractors Record Ltd, London, 1953.

KONG, Jackson. A Practical Method for the Calculation of Secondary Prestress Moments. The Hong Kong Institution of Engineers, 2004.

MONTÁNARI, Ilio. Protensão em vigas curvas. Tese de livre docência, São Carlos, 1980.

PFEIL, Walter. Concreto Protendido, volume 3: Dimensionamento à flexão. Rio de Janeiro: LTC – Livros Técnicos e Científicos Editora S. A., 1984.

RAJU, Krishna. Prestressed Concrete. 4th ed. McGraw-Hill, 2013.

ROCA, P.; MARI, A. R. Numerical treatment of prestressing tendons in the nonlinear analysis of prestressed concrete structures. Computers & Structures, nº 5, vol. 46, 1993.

SORIANO, Humberto Lima. Análise de Estruturas – Formulação Matricial e Implementação Computacional. RJ: Editora Ciência Moderna Ltda, 2005.

VAZ, Luiz Eloy. Método dos elementos finitos em análise de estruturas. RJ: Elsevier, 2011.