

# Contribuições à Análise Linear e Não Linear de Lajes Nervuradas Empregando o Método dos Elementos Finitos

*Karina Ferreira de Andrade<sup>1</sup>*  
*Christian Donin<sup>2</sup>*

## Resumo

Neste artigo são empregadas técnicas usuais de discretização via Método dos Elementos Finitos em lajes nervuradas com o emprego do Programa Ansys, que é analisado através do modo tridimensional e utilizando-se a Análise Linear e comparado os deslocamentos obtidos com Modelos Experimentais das lajes moldadas por Abdul Wahab e Khalil (2000) e com as análises numéricas de Massulo (2017), que também utilizou o Método dos Elementos Finitos com o modelo de análise não linear para as mesmas lajes. O intuito principal é entender se a diferença entre as análises (linear e não linear) para as lajes nervuradas estudadas são significativas e se devem ser considerada no projeto estrutural. Fica evidente nesse comparativo que a análise linear supre os princípios de segurança e que é superior aos métodos já consolidados e ainda, o método é simplificado do ponto de vista prático, o que torna o processo ágil e eficaz.

**Palavras-chave:** Lajes Nervuradas, Método dos Elementos Finitos, Análise Linear, Análise Não Linear.

## 1 Introdução

Com o grande avanço tecnológico na área de construção civil, a utilização de lajes nervuradas em concreto armado vem crescendo significativamente no Brasil, além da facilidade e rapidez na execução, vem se tornando uma aliada na questão custo benefício, justamente por sua eficiência, redução do custo final e antecipação do prazo da obra.

O Método dos elementos finitos (MEF) é usado para resolver muitos problemas de engenharia, popular por se resultar em programas computacionais versáteis e por apresentar soluções de grande confiabilidade. Muitas vezes o desafio do engenheiro é a capacidade de entender a natureza física do fenômeno que se propõe a resolver. Por intermédio do MEF pode-se determinar o comportamento estrutural das lajes nervuradas de alta complexidade.

Há também o constante empenho por diferenciais arquitetônicos, edificações com maior liberdade de espaço, vãos livres maiores e elementos estruturais cada vez mais distantes (vigas e pilares). Para que isso seja exequível buscam-se técnicas propícias e as lajes nervuradas tem vantagem significativa comparado ao sistema convencional, pois ocupam menor volume nos ambientes e possibilitam maior liberdade ao projetista arquitetônico.

Na necessidade de concepção estrutural é habitual sucessões de análises e modificações da estrutura inicial para a obtenção de uma solução satisfatória, seja em nível econômico ou na eficiência técnica. Nesse sentido o método dos elementos finitos se tornou uma ferramenta poderosa nas mãos de engenheiros em busca da solução para uma variedade de problemas.

Este trabalho busca o aprimoramento nos métodos de cálculo de lajes nervuradas por meio do Método de Elementos Finitos que pudesse reproduzir com mais precisão as solicitações reais nas lajes.

## 2 Modelos de Lajes Analisados

Foram analisadas as lajes ensaiadas por Abdul Wahab e Khalil (2000); artigo publicado no Journal of Structural Engineering em fevereiro de 2000 para modelá-los na ferramenta computacional Ansys (Versão 16.1 Acadêmica) e por meio do Método dos Elementos Finitos avaliar o seu comportamento de estado de tensões e deformações para as lajes nervuradas de formato quadrado e bidirecionais, com 1,50 m de vãos teóricos e que representavam lajes de 6,00 m em escala real, pois foram produzidas numa escala de 1:4. Abdul-Wahan e Khalil ensaiaram oito lajes (dessas, S1, S2, S3, S4, S5

<sup>1</sup> Pós Graduada em Nível de Especialização em Construção Civil, Universidade do Vale do Taquari, eng.kandrade@gmail.com  
<sup>2</sup> M. Sc., Professor da Universidade do Vale do Taquari e da Universidade de Santa Cruz do Sul, Doutorando em Engenharia Civil no PPGECC da Universidade Federal de Santa Maria – UFSM, donin.eng@gmail.com

e S6 eram nervuradas e bidirecionais com variações de espaçamento e altura das nervuras e S7 e S8 eram lajes maciças), as quais foram submetidas a uma força concentrada no centro das lajes em uma placa metálica de 30 cm x 30 cm até a ruptura. Além disso, apresentaram nesse mesmo trabalho o estudo numérico das mesmas lajes (por meio do Método da Analogia de Placa e do Método da Espessura Equivalente) e concluíram o que várias pesquisas indicam: que o Método da Analogia de Placas, apesar da complexidade, reproduzem com eficiência os resultados experimentais, já o Método da Analogia de Placas superestima os resultados, tornando o método conservador.

Essas lajes foram reproduzidas por Massulo (2017) pelo Método dos Elementos Finitos, numa Análise Não Linear, sendo o por objetivo comparar o comportamento das lajes com os incrementos de cargas adicionais, além de avaliar o deslocamento no centro das lajes no estado-limite de serviço (ELS) e estado-limite últimos (ELU).

No desenvolvimento deste trabalho optou-se por estudar apenas as lajes S2 e S4 de Abdul-Wahab e Khalil (2000) e comparar os resultados obtidos do presente trabalho pelo MEF por meio da análise tridimensional com os resultados experimentais objeto da análise e os resultados de Análise Não Linear obtidos por Massulo (2017).

Em uma análise linear os deslocamentos são considerados diretamente proporcionais à tensão aplicada, portanto, pode-se usar o princípio da superposição dos efeitos, e nessas condições, considerou-se que o elemento se mantém indeformado após o carregamento.

Na análise não linear (Massulo, 2017) os fatores que resultam no comportamento não linear de uma estrutura à medida em que um carregamento é aplicado são a alteração das propriedades dos materiais e a alteração da geometria da estrutura, denominada, respectivamente, de não linearidade física e não linearidade geométrica respectivamente. Assim a não linearidade geométrica se deve a deformação da estrutura após o carregamento que amplifica as solicitações a medida que a estrutura se deforma e a não linearidade física está relacionada a perda de rigidez dos elementos durante o carregamento da estrutura.

### 3 Modelo Em Elementos Finitos Tridimensionais Empregado

As análises numéricas deste estudos foram elaboradas com o *software* ANSYS 16.1 Versão Acadêmica por meio da interface gráfica do usuário ou GUI (Graphical User Interface).

Segundo Silva (2008), o Método dos Elementos

Finitos consiste não somente em transformar um elemento sólido em uma combinação de vários elementos discretos e escrever as equações de compatibilidade, mas em admitir funções contínuas que representam os deslocamentos no campo de um elemento, conseguindo, portanto, determinar o estado de deformações correspondente, que com a associação do material empregado define o estado de tensões em todo o elemento.

No método utilizado para a análise é possível que as lajes nervuradas sejam simuladas em elementos tanto bidimensionais quanto tridimensionais. Neste trabalho somente utiliza-se o modelo tridimensional, pois permite reprodução precisa das características das lajes estudadas.

O processamento de uma estrutura através do Ansys que utiliza o Método dos Elementos finitos possui a sequência a seguir discriminada.

- Modelagem: consiste no desenho da estrutura a ser calculada, sendo neste trabalho executada no próprio programa, mas podendo ser importado de outro *software*;
- Malha de elementos finitos: divisão da estrutura em elementos conectados por nós, ou seja, a discretização da mesma;
- Condições de contorno
  - Restrições: se estabelece como a estrutura se correlaciona com o meio ambiente (engastamento, relações de apoios);
  - Carregamentos: solicitações das quais a estrutura está submetida (pressões, cargas atuantes, momentos, *etc*);
- Propriedade do material: consiste em “informar” as características físicas do material utilizado na estrutura (coeficiente de Poisson, módulo de elasticidade);
- Processamento: montagem das matrizes e cálculo dos deslocamentos nodais e tensões atuantes.
- Deslocamentos: observa-se a estrutura deformada ou os deslocamentos podem ser observados os nós individualmente. Distinguem-se as áreas de maior deslocamento da estrutura.
- Tensões: podem ser visualizadas pelo mapa de cores: que se opta ou pelas direções principais, ou pelos valores máximos e mínimos principais, secundários e terciários ou ainda de acordo com critério de resistência.

## 4 Características das Lajes Estudadas

### 4.1 Características geométrica

As duas lajes analisadas são bidirecionais

e possuem geometrias distintas, a laje S4 tem material inerte e distância entre eixos das nervuras significativamente maior que a laje S2. Segue planta esquemática e a Tabela 1 com descrição das características geométricas de ambas as lajes.

**Tabela 1** – Características geométricas das lajes simuladas.

Características Geométricas	Laje S2 (cm)	Laje S4 (cm)
Altura Útil (d):	9,5	9,5
Altura da Nervura (h):	7,5	7,5
Altura da Capa (h <sub>p</sub> ):	2	2
Largura da Nervura (b <sub>w</sub> ):	5,2	5,2
Distância entre eixos das nervuras (a)	16,7	30
Distância entre nervuras (b)	11,5	24,8

#### 4.2 Parâmetros dos Materiais

Foram consideradas ainda na análise numérica, conforme recomendações da NBR 6118:2014:

– Coeficiente de Poisson adotado:  $\nu = 0,2$ .

O Módulo de Elasticidade: , sendo considerado e um fator de redução do Módulo de Elasticidade inicial para obter o secante, já que o estudo experimental de Abdul e Khalil (2000) não menciona o agregado graúdo utilizado no concreto, e  $f_{ck}$  conforme ensaios de compressão das amostras de concreto utilizado para execução das lajes, publicados no artigo científico mencionado.

Segue Tabela 2 com os valores de  $f_{ck}$  e demais propriedades utilizadas para análise obtidas das lajes ensaiadas experimentalmente.

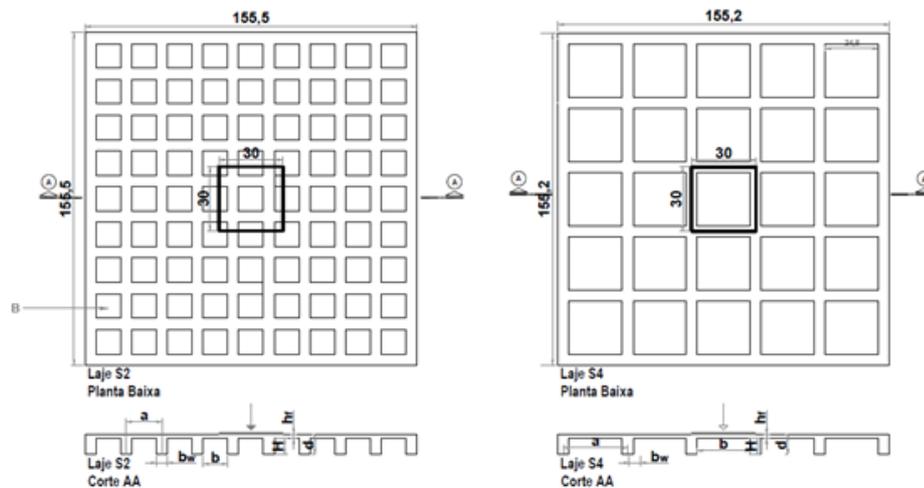
**Tabela 2** – Resistência a Compressão e Módulo de elasticidade das Lajes S2 e S4.

	Laje S2	Laje S4
$f_{ck}$ (MPa)	32.000	28.900
$E_{ci}$ (MPa)	27.000	26.000
$E_{cs}$ (MPa)	27.000	26.000

#### 4.3 Elemento Finito, Malha Empregada e Condições de Contorno

Com a geometria composta e utilizado o elemento SOLID-65 do *Software Ansys* para análise tridimensional de estruturas sólidas, que tem oito nós de liberdade, e a cada um dos nós com três graus de liberdade (translação nos eixos x, z e y). Esse elemento além das deformações plástica e fluência é capaz de representar as fissuras do concreto em três direções.

Inicialmente para testar os modelos experimentais de Abdul e Khalil (2000) e adequar a dimensão ideal do elemento finito, foi realizada a análise de convergência. A necessidade de análise da convergência deve-se ao fato de distinguir o quão pequeno deve ser os elementos para que se obtenha um resultado confiável, já que a literatura não define essa questão. Essa convergência foi estabelecida pelo refinamento da malha, ou seja, redução do tamanho dos elementos, para tanto, foi testado as primeiras geometrias (tanto S2 quanto S4) com elemento inicial de 5 cm, registrou-se o resultado e foi refinado a malha para a análise de convergência. Para ambas as lajes foram adotado elementos de 2 cm (conforme Figura 3), entendendo que essa malha já indicava resultados confiáveis.



**Figura 1** – Geometria das lajes S2 e S4, (medidas em cm).

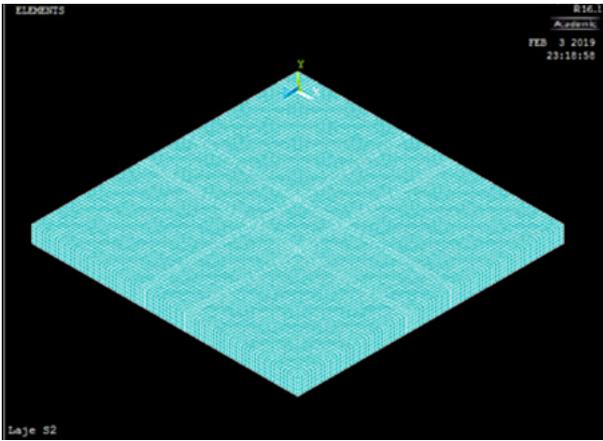


Figura 3 – Laje S2 moldada e com os elementos lançados.

Quanto às condições de contorno adotadas, toda a borda foi restringido nas direções  $y$  (sentido vertical da laje), sendo necessário que os nós das extremidades fossem restritos de deslocamento nas três direções ( $x$ ,  $y$ , e  $z$ ), portanto, além das restrições vertical, foi impedido o deslocamento vertical nos nós das bordas nos dois sentido), assim, o processamento das equações pelo Ansys não foi considerado engaste (Figura 4), apenas foram dados condições para o correto funcionamento do sistema.

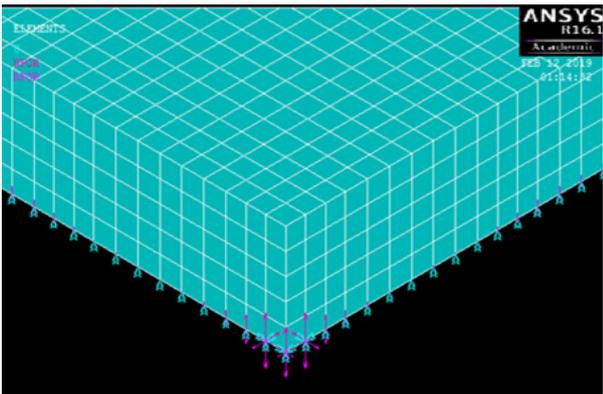


Figura 4 – Laje S2 com as condições de contorno aplicadas.

Em ambos os modelos foi adotado para análise pelo Método dos Elementos Finitos uma força concentrada no centro das lajes, que se iniciou com uma carga de  $10\text{kN}$  ( com essa carga o elemento ainda se considerava na fase elástica) e aumentado a carga tal qual se tem conhecimento nas lajes experimentais de Wahab e Kahlil (2000).

## 5 Resultados

Seguindo os critérios já descritos as Lajes foram reproduzidas no Programa Ansys exatamente como o protótipo da análise experimental executado por AbdulWahab e Khalil (2000), cujas características geométricas podem ser observadas na Tabela 2, salientando que os modelos utilizados foram moldados em escala reduzida (1:4) e que, portanto, representam uma laje real de  $600\text{ cm} \times 600\text{ cm}$ . Os mesmos modelos foram analisados via Método dos elementos finitos através da Análise Não Linear por Massulo (2017). Na análise atual pode-se comparar os métodos já aplicados com o Método dos Elementos Finitos com a Análise Linear.

Os resultados de Abdul-Wahab e Khalil (2000) são apresentados em forma de gráficos com todas as lajes por eles ensaiadas. Neste trabalho adotou-se como base os deslocamento das lajes S2 e S4 ensaiadas experimentalmente os valores de  $0,30\text{ mm}$  e  $0,43\text{ mm}$  (obtido pelo gráfico experimental na literatura), respectivamente, para a carga de  $10\text{kN}$ , considerando a fase elástica-linear do concreto para validação do modelo em Elementos Finitos. Os demais deslocamentos foram extraídos do gráfico e estão especificados na Tabela 2 e Tabela 3.

Após várias análises, os deslocamentos foram obtidos em todos os níveis de cargas experimentais (exemplos dos resultados obtidos se encontram nas Figuras 5, 6 e 7)

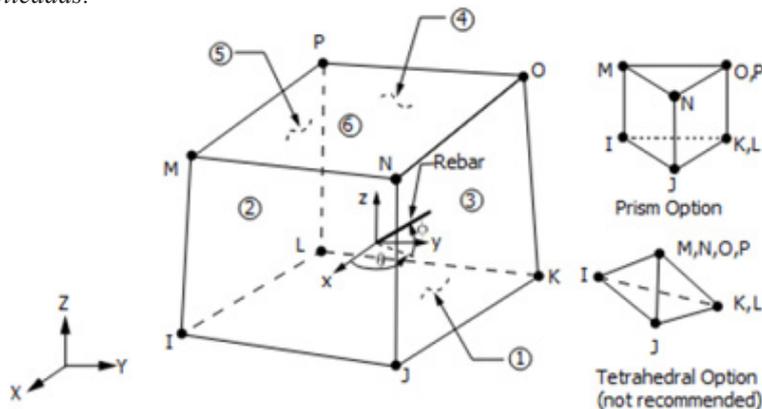


Figura 2 – Elemento SOLID -65 utilizado na análise das lajes (Ansys 16.1 Reference Manual).

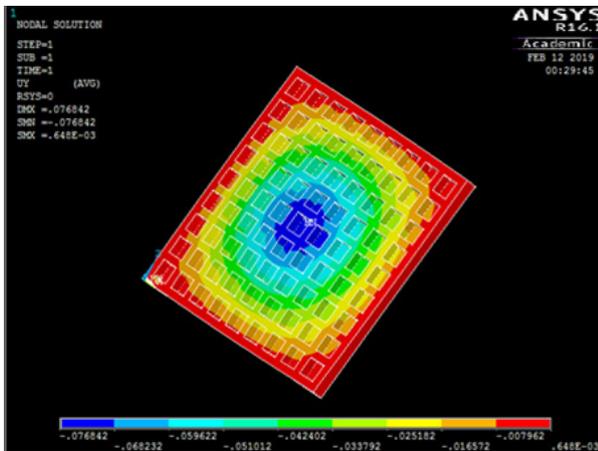


Figura 5 – Deslocamento na Laje S2 com a carga aplicada de 20kN.

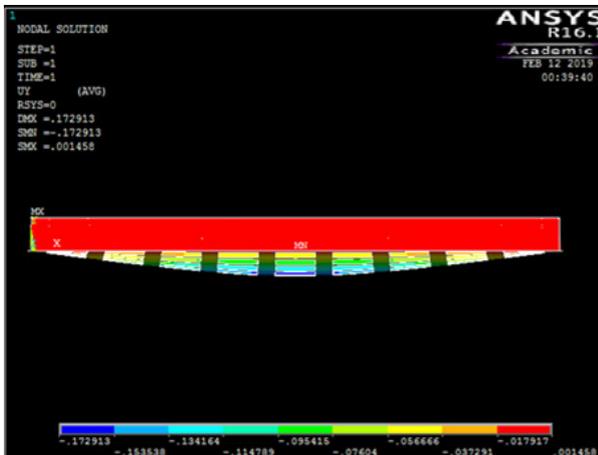


Figura 6 – Deslocamento na Laje S2 com a carga aplicada de 45kN.

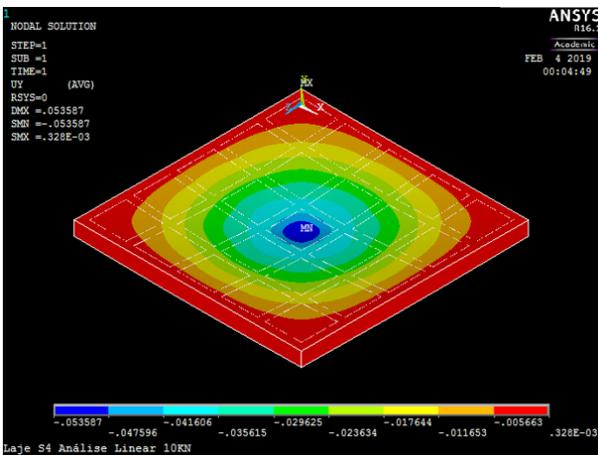


Figura 7 – Deslocamento na Laje S4 com a carga aplicada de 10kN.

Os deslocamentos obtidos são mostrados na Tabela 3 e na Tabela 4 em sequência da carga aplicada:

Tabela 3 – Comparativo dos deslocamentos experimentais da Laje S2 de Abdul-Wahab e Khalil (2000), Análise Não Linear de Massulo (2017) e Análise Linear.

Força Aplicada (KN)	Experimental:	Análise Não Linear MEF:	Análise Linear MEF
0	0,00	0,00	0,00
10	0,30	0,20	0,38
20	0,60	0,50	0,77
30	1,40	0,85	1,15
40	2,40	1,30	1,54
45	–	1,60	1,73
50	3,30	2,05	1,92
60	4,50	3,40	2,30
70	7,00	5,70	2,70
75	8,20	–	–

Tabela 4 – Comparativo dos deslocamentos experimentais da Laje S4 de Abdul-Wahab e Khalil (2000), Análise Não Linear de Massulo (2017) e Análise Linear.

Força Aplicada (KN)	Experimental:	Análise Não Linear MEF:	Análise Linear MEF
0	0,00	0,00	0,00
10	0,43	0,50	0,53
20	1,70	1,20	1,07
30	3,30	2,70	1,60
40	6,20	5,65	2,14
45	10,00	8,80	2,41
50	–	–	–
60	–	–	–
70	–	–	–
75	–	–	–

No que diz respeito aos estado de tensões, os estados-limites de serviços são os pertinentes ao conforto do usuário e à sua durabilidade, aparência e boa utilização das estruturas, sendo de suma importância em lajes, que fortuitamente pode estar corretamente dimensionada para os estados limites últimos, ou seja, não tem risco de esgotamento da capacidade resistente, mas possui uma flecha demasiada, causando desconforto ao usuário.

Estudos mostram que as cargas máximas permitidas são baixas comparadas a capacidade de força final de suporte das lajes. Assim, Donin (2007), conclui que a utilização da laje pré-moldada fica dependente da deformação máxima.

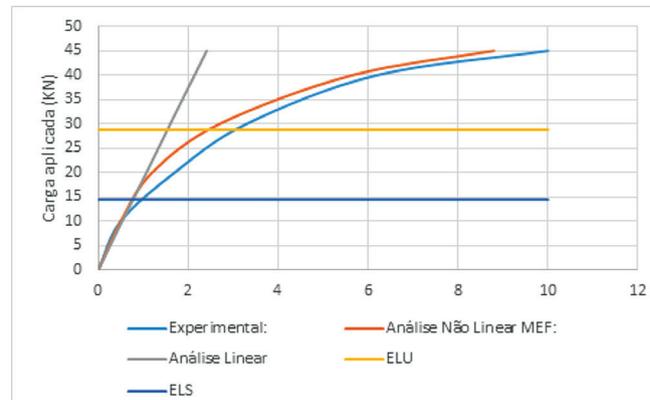
Para possibilitar uma melhor comparação dos resultados entre a Análise Linear proporcionada nesse estudo e a Análise não Linear de Massulo (2017) com os resultados dos deslocamentos experimentais, são apresentados na Tabela 5 e Tabela 6 (Figura 10 e Figura 11, que representam graficamente as tabelas mencionadas) um comparativo dos valores dos deslocamentos teóricos divididos pelo experimentais a fim de proporcionar a análise de desempenho dos dois modelos numéricos.

**Tabela 5** – Comparativo Teórico/Experimental Laje S2.

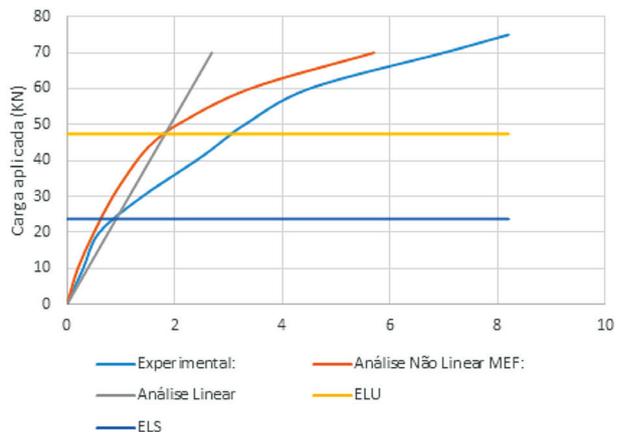
Força Aplicada KN	Análise Não Linear MEF	Análise Linear MEF
0	0	0
10	0,666667	1,28067
20	0,833333	1,28067
30	0,607143	0,82329
40	0,541667	0,64040
45	–	–
50	0,621212	0,58215
60	0,755556	0,51229
70	0,814286	0,38424
Média	0,691409	0,78623
Desvio Padrão	0,103109	0,33592

**Tabela 6** – Comparativo Teórico/Experimental Laje S4.

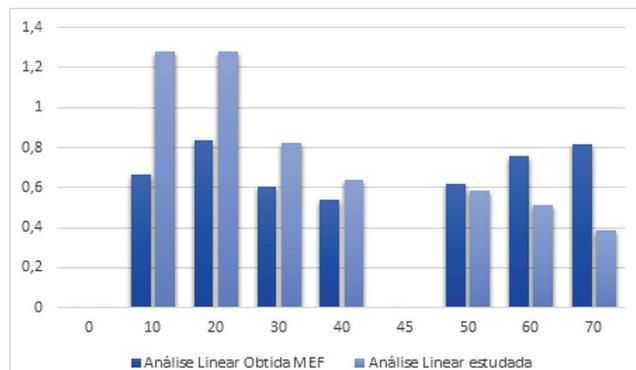
Força Aplicada KN	Análise Não Linear MEF	Análise Linear MEF
0	0	0
10	1	1,06
20	0,755882	0,629414
30	0,818182	0,484848
40	0,91129	0,345161
45	0,88	0,241
Média	0,863071	0,552084
Desvio Padrão	0,098066	0,285681



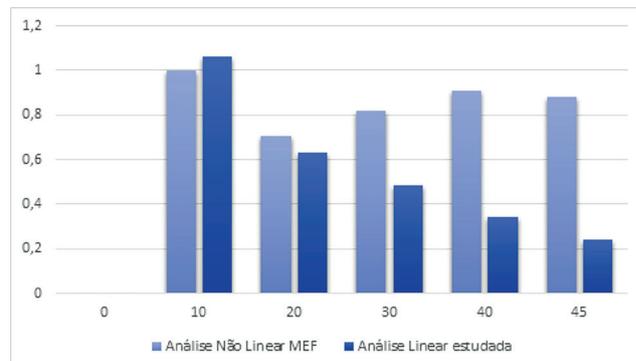
**Figura 8** – Diagrama Tensão x Deformação na Laje S2.



**Figura 9** – Diagrama Tensão x Deformação na Laje S4.



**Figura 10** – Gráfico com relação entre deslocamentos para Análise Linear e Não Linear Laje S2



**Figura 11** – Gráfico com relação entre os deslocamentos entre Análise Linear e Não Linear Laje S4.

## 6 Conclusões

Com base nos resultados é possível realizar a análise dos deslocamentos que são apresentados na Tabela 3 e na Tabela 4, sendo justificável afirmar que todos os resultados apresentam coerência com o obtido experimentalmente, mesmo que o modelo do Método dos Elementos Finitos tenha divergido um pouco do experimental, pode-se dizer que o Método utilizado é a favor da segurança e superior aos demais métodos utilizados habitualmente já consolidados, apresenta assim, um enorme potencial para ser utilizado para o cálculo de lajes nervuradas, conduzindo o projetista a resultados confiáveis.

Para a Laje S2 o comportamento da Análise Linear foi muito semelhante à da Análise Não Linear, isso porque a grande parte das cargas aplicadas estão ainda no ELS e ELU. Na Laje S4 o resultado do estudo ficou um pouco distante da Análise Não Linear, principalmente após a carga do ELS, o que não invalida o Método, visto que em fase de projeto, sempre se considera a carga de serviço para análise.

Observou-se também que o Modelo de Análise Não Linear se aproximou mais da base experimental, principalmente no estado limite último, isso porque simula a interação aço/ concreto. Mesmo assim, o Método Linear é coerente com o resultado experimental e seus resultados são mais conservadores o que, na fase de projeto, não compromete a segurança da estrutura e, portanto, pode ser utilizado sem precauções. Logo se mostra uma ótima alternativa de análise, pois a modelagem tridimensional é muito menos complexa que a Análise Não Linear.

Assim, na Análise Linear dos protótipos estudos,

os resultados deixam evidentes que esses podem ser utilizados na fase de projetos sem comprometer a segurança da estrutura para níveis de carregamentos habituais.

## 7 Referências Bibliográficas

ABDUL-WAHAB, H.M.S.; KHALIL, M. H; Rigidity and strength of orthotropic reinforced concrete waffle slabs.

Journal of Structural Engineering, v. 126, n. 2, p. 219-227, Feb 2000.

ANSYS 16.1 REFERENCE MANUAL. Swanson Analysis Systems, Inc., 2015.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR: 6118: Projeto de Estruturas de concreto – Procedimento. Rio de Janeiro, 2014.

DONIN, CHRISTIAN; Análise Numérica de Lajes Nervuradas por meio do Método dos Elementos Finitos. Dissertação (Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil – Mestrado), 2007.

MASSULO, LEONARDO A.; Análise dos Deslocamentos em Lajes Nervuradas Considerando Modelos Não Lineares por meio do Método dos Elementos Finitos.

Trabalho de Conclusão de Curso de Engenharia Civil – Universidade de Santa Cruz do Sul, 2017.

SILVA, NUNO M. T. F.; Análise Estática e Dinâmica de Lajes Nervuradas De Concreto Armado.

Dissertação (Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil – Mestrado), Universidade do Estado do Rio de Janeiro, 2008.