

Avaliação da Capacidade de Rotação Plástica em Lajes e Vigas de Concreto Armado

Diego F. C. S. Queiroz¹
Sergio H. C. Santos²

Resumo

Este artigo apresenta dois métodos de cálculo para a determinação da capacidade de rotação plástica de três estruturas biengastadas com diferentes relações entre altura da seção e comprimento do vão, visando calcular o carregamento máximo a que elas resistem. As estruturas não necessariamente entram em colapso a partir da formação da primeira rótula plástica, sendo necessária a formação de um mecanismo de colapso. Portanto, a carga de ruptura é maior quando é considerado o efeito da plastificação. A avaliação da capacidade de rotação plástica é importante para se prevenir o rompimento da estrutura e garantir seu correto funcionamento e ductilidade. A partir dos resultados obtidos, foram realizadas comparações com os critérios da NBR 6118 [1] para os coeficientes de redistribuição de esforços, em que se verificou grande influência da relação entre altura da seção e comprimento do vão e pequena influência da resistência característica à compressão do concreto em ambos os métodos considerados. Os resultados mostraram que estruturas menos esbeltas permitem maior redistribuição de esforços do que estruturas mais esbeltas. Também se realizou uma análise comparativa dos comprimentos de rótula plástica utilizado nas análises com os propostos por diversos autores. Nesse caso verificou-se boa compatibilidade entre os valores utilizados neste trabalho com valores de comprimento de rótula plástica obtidos com equações da literatura.

Palavras-chave: Concreto armado, análise plástica, rótula plástica, análise comparativa.

1 Introdução

Ao se aumentar continuamente o carregamento em estruturas de concreto armado, a armadura pode atingir o limite de escoamento em um ou mais pontos críticos de momentos máximos. Assim, se originam articulações chamadas de rótulas plásticas, que são caracterizadas por um aumento plástico da curvatura, associado ao aumento do carregamento. Elas se concentram em seções críticas e ocorrem em pequenos trechos, chamados de zonas de plastificação, onde o momento se mantém constante.

Assim, estas seções não absorvem mais esforços adicionais e as deformações continuam a aumentar, o que implica no aumento das rotações. A estrutura não necessariamente entra em colapso a partir da formação da primeira rótula plástica, sendo necessária a formação de um mecanismo de colapso que torne a estrutura hipostática. Estruturas hiperestáticas possuem

uma reserva de capacidade resistente, pois, para que tal mecanismo ocorra, é necessária a formação de mais de uma rótula plástica.

Em virtude do excedente de resistência proveniente da plastificação, é essencial se avaliar a capacidade de rotação plástica de elementos de concreto armado para se garantir seu adequado comportamento estrutural. Ao se garantir a capacidade de rotação plástica nas seções críticas em estruturas suficientemente dúcteis, é possível realizar a redistribuição de esforços a partir de uma análise plástica. Desta forma, as cargas de ruptura obtidas neste tipo de análise são maiores do que aquelas obtidas em análises lineares.

O objetivo principal deste artigo é avaliar a capacidade de rotação plástica de vigas e lajes de concreto armado, determinando-se os coeficientes de redistribuição de esforços a partir disso. Busca-se comparar os valores obtidos a partir da análise plástica com os critérios preconizados pela NBR 6118:2014, considerando

1 Engenheiro Civil, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Escola Politécnica, diegosouza@poli.ufrj.br, Rio de Janeiro, Brasil.

2 Professor Titular (D.Sc), Universidade Federal do Rio de Janeiro, Escola Politécnica, Departamento de Estruturas, sergiohampshire@gmail.com, Rio de Janeiro, Brasil.

diferentes relações de altura da seção e vão, bem como diferentes resistências características do concreto. Também se objetiva comparar os comprimentos de rótula plástica adotados neste trabalho com os de formulações propostas por outros pesquisadores.

A abordagem seguida consiste na análise plástica de duas vigas e uma laje biengastadas submetidas a um carregamento uniformemente distribuído, considerando três razões de h/l (altura da seção e vão) diferentes, de forma que as duas primeiras representam vigas com diferentes valores de esbeltez e a terceira simula uma relação típica de lajes (aproximadamente 1/50). Também se consideram duas classes diferentes de resistência de concreto: C20 e C30.

O cálculo da rotação plástica é feito por dois métodos. O primeiro considera um ângulo de rotação plástica igual ao limite estabelecido pela NBR 6118:2014 para a verificação da rotação da rótula. No segundo método, a rotação no engaste é avaliada por integração das curvaturas em um comprimento previamente definido de rótula plástica. Em seguida, calcula-se o valor do momento negativo máximo que a estrutura suporta quando considerada a plastificação e, assim, determina-se o coeficiente de redistribuição de momentos δ para várias profundidades relativas de linha neutra. Com a obtenção dos valores de δ oriundos das análises, são realizadas comparações entre os resultados obtidos e os valores definidos na NBR 6118:2014.

São consideradas curvas momento-curvatura das estruturas, obtidas por meio do programa CAPIBA-MK (SOUZA, 2012), a fim de se determinar parâmetros para o cálculo da rigidez à flexão elástica e plástica.

Ao final, comparam-se os valores de comprimento de rótula pré-definidos utilizados nas análises plásticas do trabalho com os de fórmulas elaboradas por outros autores. Essa definição é essencial para o cálculo da rotação plástica.

Este artigo resume o Projeto de Graduação (QUEIROZ 2019) apresentado pelo primeiro autor, sob a orientação do segundo autor.

2 Comprimento de Rótula Plástica

Há muitos anos a rótula plástica, que é a zona de concentração de deformações plásticas, tem sido um interessante e complexo tema de pesquisa relacionado às estruturas de concreto armado. A performance de uma rótula plástica está intimamente ligada à capacidade de resistência e de deformação do elemento estrutural (ZHAO *et al.*, 2011). Um ponto crucial do problema a ser definido é o da extensão das rótulas plásticas.

Define-se o comprimento de rótula como sendo um comprimento equivalente, onde uma dada curvatura plástica é considerada como constante para a integração das curvaturas da seção transversal ao longo deste comprimento, a fim de se determinar as capacidades de deflexão e rotação de um elemento de concreto armado. Na verdade, este comprimento não é o comprimento físico real em que a plastificação realmente se apresenta, mas sim um comportamento idealizado (ZHAO *et al.* 2011).

De acordo com Arbulu (2006), diversos estudos realizados em estruturas de concreto armado demonstraram que o comprimento equivalente de uma rótula plástica é proporcional às dimensões do elemento estudado, isto é, altura da seção da viga e comprimento do vão. Além disso, o autor comenta que muitos modelos empíricos foram desenvolvidos com o intuito de se estimar o comprimento de rótula plástica com base em resultados obtidos em testes experimentais. Tais modelos foram calibrados a fim de se determinar deslocamentos totais e o valor real da rotação no momento da ruptura, mas cada um deles considera parâmetros diferentes, o que resulta em previsões significativamente diferentes.

Também se estudou o efeito de cargas axiais e o efeito de *strain hardening* (encruamento do material após o escoamento do aço), porém não está claro ainda quais parâmetros são mais relevantes para determinação do comprimento de rótula plástica. Outros parâmetros importantes considerados para o cálculo do comprimento de rótula plástica são propriedades relativas às armaduras como a tensão de escoamento e o diâmetro das barras (ARBULU, 2006).

O conceito de comprimento de rótula plástica pode ser definido a partir do deslocamento na extremidade de um elemento em balanço, em que o deslocamento total pode ser dividido em uma parcela elástica e outra plástica. Assume-se que a curvatura inelástica na região plastificada é constante ao longo do comprimento de rótula plástica (ARBULU, 2006). O deslocamento total Δ na extremidade do balanço é dado por.

$$\Delta = \frac{\phi_y L^2}{3} + (\phi - \phi_y) L_p \left(L - \frac{L_p}{2} \right) \quad (1)$$

onde

ϕ_y = curvatura no escoamento do aço (1/m)

ϕ = curvatura total na ruptura (1/m)

L = comprimento total do elemento (m)

L_p = comprimento da rótula plástica (m)

3 Definições Normativas

Neste tópico são apresentadas algumas definições normativas necessárias para a realização das análises plásticas a serem aqui tratadas.

3.1 Diagramas tensão-deformação específica

As análises plásticas irão considerar o diagrama tensão-deformação parábola-retângulo idealizado para a compressão do concreto, conforme indicado pela NBR 6118:2014, para as verificações no Estado-Limite Último (ELU). Estes expressam a relação entre σ_c (tensão) e ϵ_c (deformação específica). Para concretos de classe até C50, o patamar plástico, com resistência constante $0,85 f_{cd}$, é definido pelos valores ϵ_{c2} (deformação específica de encurtamento do concreto no início do patamar) e ϵ_{cu} (deformação específica de encurtamento do concreto na ruptura), iguais a 2‰ e 3,5‰, respectivamente.

Para o aço, é considerado o diagrama tensão-deformação bilinear simplificado, expressando a relação entre σ_s (tensão) e ϵ_s (deformação específica). O patamar plástico, com resistência f_{yd} , é definido pelos valores ϵ_{yd} (igual a 2,07‰ para o aço CA-50) e 10,0‰.

3.2 Análise linear com redistribuição

Nesta análise, os efeitos das ações são redistribuídos na estrutura, considerando-se combinações de carregamento do ELU, segundo a NBR 6118:2014. Tais efeitos são os previamente determinados em uma análise linear.

O item 14.6.4.3 da NBR 6118:2014 determina limites para a posição da linha neutra no ELU, a fim de proporcionar o adequado comportamento dúctil em vigas e lajes. Para concretos com valores de f_{ck} inferiores a 50 MPa, o limite é dado por:

$$x/d \leq 0,45 \quad (2)$$

onde

x = profundidade da linha neutra (m)

d = altura útil da seção (m)

A NBR 6118:2014 também define que, quando uma redistribuição de momentos for realizada, de forma a se reduzir um momento fletor M para δM em uma seção transversal, a profundidade relativa da linha neutra nessa seção, simbolizada por k_x , deve ser limitada. Para concretos com f_{ck} menor que 50 MPa, o limite é dado por:

$$k_x = x/d \quad k_x = x/d \leq \delta (-0,44)/1,25 \quad (3)$$

onde

δ = coeficiente de redistribuição

A redistribuição ainda deve obedecer aos limites a seguir:

a) estruturas de nós móveis

$$\delta \geq 0,90 \quad (4)$$

b) demais casos

$$\delta \geq 0,75 \quad (5)$$

3.3 Análise plástica

A NBR 6118:2014 considera que nesse tipo de análise as não linearidades são explicitamente consideradas, admitindo-se para os materiais comportamento rígido-plástico perfeito ou elastoplástico perfeito. Essa análise deve ser utilizada apenas para verificações no ELU.

O item 14.6.4.4 da NBR 6118:2014 estabelece uma limitação para a rotação nas rótulas plásticas localizadas nas seções críticas nas análises plásticas. Esta verificação implica em que a capacidade de rotação plástica nestas seções não pode ser superada. A Figura 1 apresenta os limites para a capacidade de rotação plástica estabelecidos pela Norma em função da profundidade da linha neutra, expressa por x/d . Nesta figura, considera-se a relação $a/d = 3$, em que $a = M_{sd}/V_{sd}$, sendo M_{sd} o momento fletor solicitante na seção analisada e V_{sd} a força cortante solicitante nesta seção. Para outras relações do fator a/d , multiplicam-se os valores extraídos do gráfico da Figura 1 pelo fator $\sqrt{(a/d)/3}$. Portanto, tem-se a

$$\theta_{\max,adm} = \theta_{pl} \sqrt{\frac{(a/d)}{3}} \quad (6)$$

Nessa equação, $\theta_{\max,adm}$ representa a rotação plástica admissível e θ_{pl} é a rotação plástica retirada da Figura 1 da NBR 6118:2014.

Segundo a NBR 6118:2014, é dispensada a verificação explícita da capacidade de rotação plástica, desde que a posição da linha neutra seja limitada pela seguinte expressão, para concretos com f_{ck} menor que 50 MPa:

$$x/d \leq 0,25 \quad (7)$$

Adicionalmente, a análise de esforços na análise plástica em elementos de placa pode ser realizada pela Teoria das Charneiras Plásticas no ELU. O atendimento

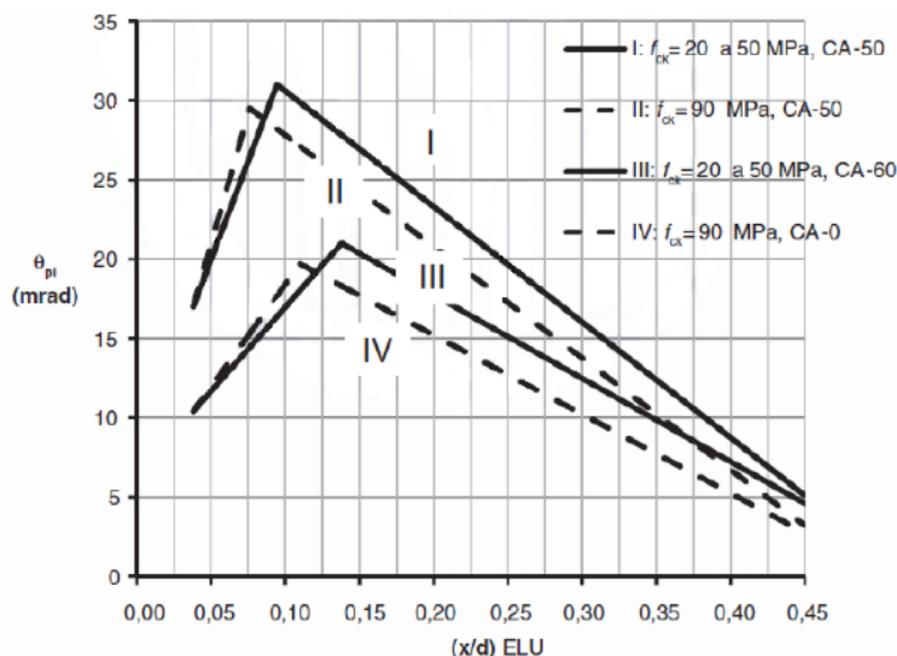


Figura 1 – Capacidade de rotação de rótulas plásticas (NBR 6118:2014).

à Equação 7 garante as condições apropriadas de ductilidade para que a verificação explícita da capacidade de rotação plástica possa ser dispensada.

4 Métodos de Análise Plástica

Neste trabalho, foram aplicadas duas formulações distintas para a determinação do coeficiente de redistribuição de momentos δ , computado a partir da determinação da capacidade de rotação plástica da estrutura.

No primeiro método, considera-se que as rotações máximas sejam aquelas definidas no item 3.3. Com isso, pode-se calcular o menor valor do coeficiente de redistribuição de momentos possível associado ao valor máximo de rotação plástica permitido pela Norma.

No segundo método de cálculo considera que a rotação plástica é definida pela integração das curvaturas em um trecho plastificado igual a $0,6h$ (h é a altura da seção). Esse trecho é definido no EUROCÓDIGO 2 (2004).

4.1 Método 1

A aplicação do Método 1 considera-se uma viga biengastada de comprimento l e seção transversal retangular de altura h , base b e altura útil d , sujeita a um carregamento q uniformemente distribuído. O momento negativo máximo nos engastes tem valor igual

a $ql^2/12$ e o momento positivo máximo, encontrado no meio do vão, é igual a $ql^2/24$. Considera-se que a estrutura atinge o escoamento nas regiões de momento negativo máximo (nos engastes).

São consideradas diversas relações de x/d . Para cada uma delas se determina o momento de cálculo de projeto M_d e a área de armadura do aço A_s , obtidos a partir das definições normativas no ELU para o dimensionamento à flexão simples. A distribuição de tensões segue um diagrama retangular simplificado com profundidade dada por $y = 0,8x$, sendo x a profundidade da linha neutra e a tensão máxima igual a $0,85 f_{cd}$. A partir deste cálculo são obtidos os respectivos diagramas momento-curvatura com o programa CAPIBA-MK (SOUZA, 2012). As Figuras 2 e 3 representam, respectivamente, diagramas momento-curvatura idealizados e reais obtidos com o CAPIBA-MK.

O comportamento da viga bi-engastada pode ser melhor entendido considerando-se uma viga bi-apoiada sujeita ao carregamento distribuído q e também a momentos de extremidade de valor M , tais que estes anulem as rotações nos apoios. Os momentos M serão os momentos negativos nos engastes.

As equações do ângulo de rotação nos apoios para uma viga sujeita ao carregamento q (θ_{carga}) e sujeita a momentos concentrados M (θ_M) são expressas por

$$\theta_{carga} = \frac{ql^3}{24(EI)_{elástico}} \quad (8)$$

$$\theta_M = \frac{Ml}{2(EI)_{\text{elástico}}} \quad (9)$$

Evidentemente no problema elástico linear, a igualdade entre as equações conduz ao valor trivial do momento no engaste igual a $ql^2/12$.

Caso se apresentem na viga momentos superiores a M_y esta consideração não é mais válida, Surge uma rotação adicional; a viga se deforma em regime plástico a partir da curvatura elástica $(1/r)_{\text{elástica}}$ (curvatura na seção no instante do escoamento das armaduras) até a curvatura plástica $(1/r)_{\text{plástica}}$ (curvatura total da seção). Esta corresponde ao momento de ruptura M_u . Na Figura 2, também se observa que o valor de $(EI)_{\text{elástico}}$ pode ser obtido diretamente com o diagrama momento-curvatura simplificado.

$$(EI)_{\text{elástico}} = \frac{M_y}{\left(\frac{1}{r}\right)_{\text{elástica}}} \quad (10)$$

Os valores de momentos e curvaturas destes dois pontos notáveis são obtidos a partir dos diagramas momento-curvatura gerados pelo programa CAPIBA-MK (SOUZA, 2012), como pode ser visualizado nas Figuras 3 e 4.

A rotação plástica θ_{pl} é dada pelos limites da NBR 6118:2014 mostrados na Figura 1.

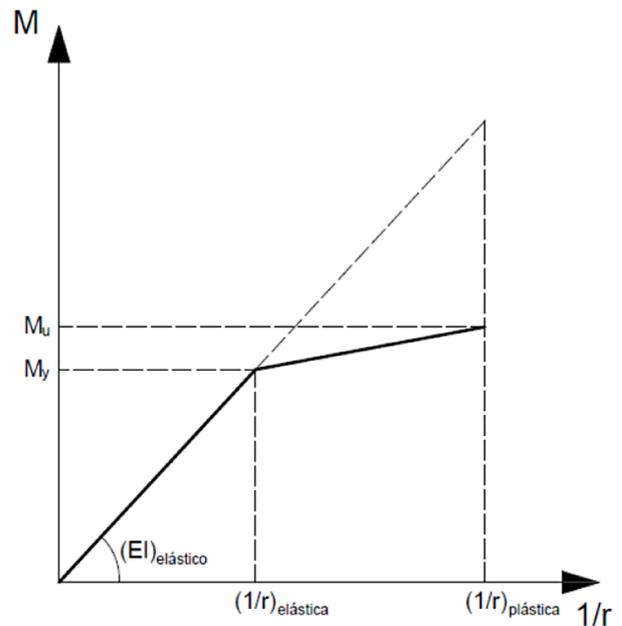


Figura 2 – Diagrama momento-curvatura bilinear (simplificado) do concreto armado, considerando as regiões de comportamento elástico e plástico.

Segundo o critério do EUROCÓDIGO 2 (2004), como mostrado na Figura 5, para vigas contínuas e lajes contínuas armadas numa di direção, a capacidade de rotação é avaliada em um comprimento igual a 1,2 vezes a altura da seção h . A Figura 5 ilustra a rotação plástica de uma viga ou laje contínuas, que é análoga à situação do engaste perfeito em um comprimento $0,6h$. Portanto, a fim de se fazer a correta

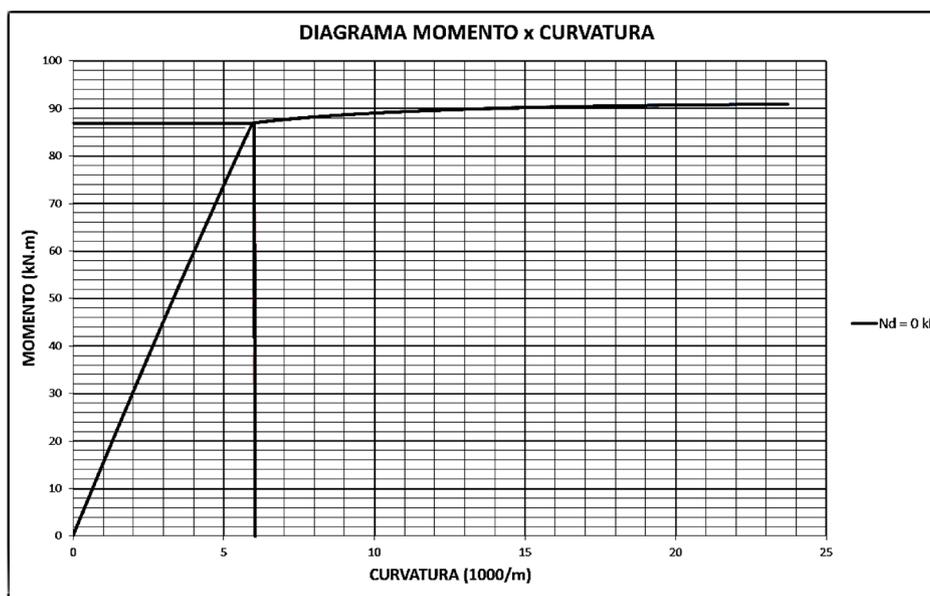


Figura 3 – Exemplo de obtenção do par Momento-Curvatura elástico no diagrama gerado pelo programa CAPIBA-MK.

compatibilização das rotações, considera-se a metade do valor obtido na Figura 1. Tem-se a seguinte equação de compatibilização:

$$\theta_{\text{carga}} = \theta_M + \frac{\theta_{\text{max,adm}}}{2} \quad (11)$$

Desa forma obtém-se a carga máxima de projeto q_d por meio da Equação 8 invertida. A partir disso, obtém-se o valor de M_{d0} , que é o valor do momento negativo máximo que a viga biengastada suporta elasticamente antes da plastificação:

$$M_{d0} = \frac{q_d l^2}{12} \quad (12)$$

A estrutura está sujeita ao momento M_{d0} que, após a redistribuição das solicitações se reduz para o

momento M_d , que é o valor considerado para o dimensionamento da estrutura. Assim, calcula-se o valor do coeficiente de redistribuição das solicitações para o Método 1, simbolizado por δ_1 , dado pela razão entre o momento correspondente ao limite da análise elástica linear e M_{d0} .

$$\delta_1 = \frac{M_d}{M_{d0}} \quad (13)$$

O cálculo descrito anteriormente é realizado para valores de k_x que variam entre 0,05 e 0,45.

4.2 Método 2

Neste método, as hipóteses consideradas no item 4.1 são novamente aceitas, tendo em vista tratar-se da mesma estrutura. Porém, o cálculo da rotação plástica

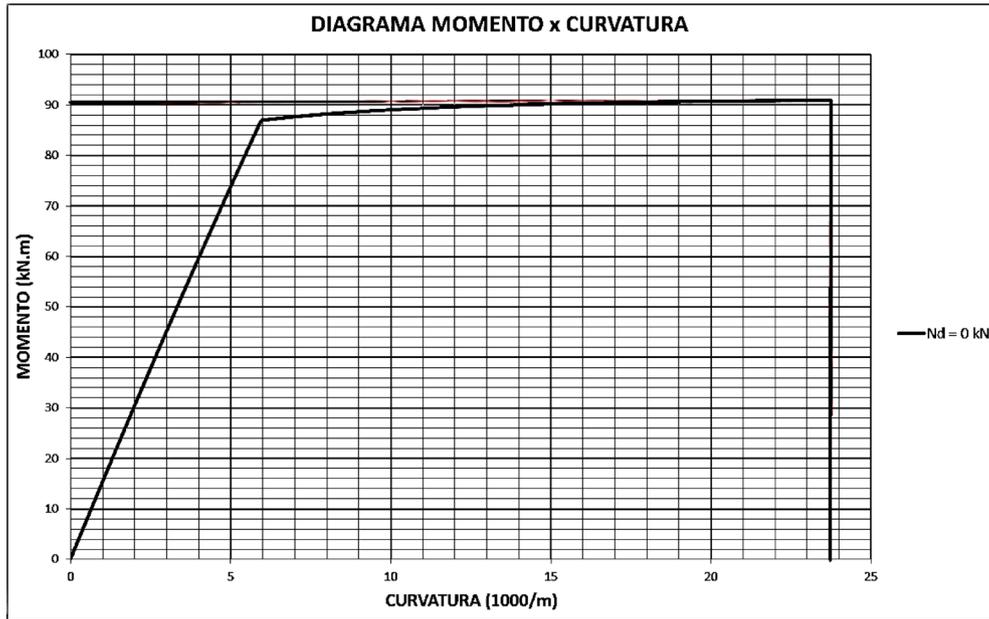


Figura 4 – Exemplo de obtenção do par Momento-Curvatura plástico (na ruptura) no diagrama gerado pelo programa CAPIBA-MK.

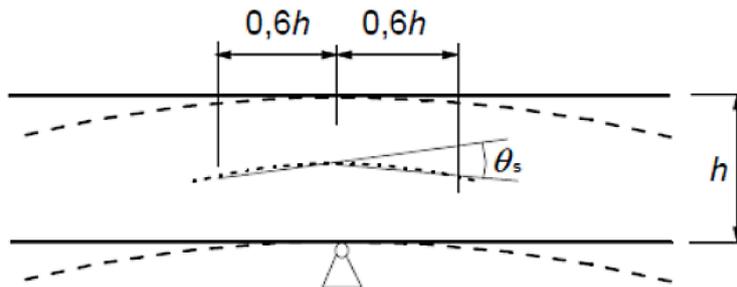


Figura 5 – Rotação plástica em uma seção de concreto armado de uma viga contínua ou laje contínua armada em uma direção.

θ_{pl} não segue mais os limites estabelecidos pela NBR 6118:2014 para a rotação máxima permitida.

Considera-se agora uma zona plastificada próxima os engastes, nas regiões de momento negativo máximo, onde ocorre o escoamento da armadura e surge a rótula plástica de comprimento l_{pl} .

A capacidade de rotação plástica será definida como a diferença entre a rotação correspondente à carga última e a rotação verificada no início do escoamento das armaduras. Dessa forma, a rotação plástica é calculada como a integral da curvatura após o escoamento das armaduras, a ser concentrada na região crítica (engaste):

$$\theta_{pl} = \int_0^{l_{pl}} \left(\left(\frac{1}{r} \right)_{plástica} - \left(\frac{1}{r} \right)_{elástica} \right) dx \quad (14)$$

Assim, deve-se determinar os valores das curvaturas elástica e plástica, respectivamente, a fim de se calcular a área hachurada da Figura 6, que representa a capacidade de rotação plástica da viga. A linha contínua da curvatura representa a distribuição elástica da curvatura, enquanto que a linha tracejada representa o acréscimo da plastificação na região próxima ao engaste, a partir da qual se obtém a curvatura total.

A área é calculada pelo triângulo simplificado cujas dimensões são a diferença entre as curvaturas plástica e elástica, que são tomadas no diagrama momento-curvatura gerado pelo programa CAPIBA-MK (SOUZA, 2012), referente aos momentos de ruptura e escoamento, respectivamente. É considerado o dobro

do comprimento de rótula, que o EUROCÓDIGO 2 (2004) define como sendo igual a $2 \times l_{pl} = 2 \times 0,6h = 1,2h$ (Figura 5). A situação de engaste perfeito se materializa em uma viga contínua, o que justifica a consideração dos dois lados do engaste.

O comprimento de rótula $0,6h$ é convencional e não expressa a distância real entre os momentos de escoamento e ruptura, pois, teoricamente, tal distância é muito menor. Ambos se encontram muito próximos pela sua pequena diferença em magnitude. Se a distância real entre ambos fosse levada em consideração para a obtenção das curvaturas, a área hachurada da Figura 6 seria pequena e a capacidade de rotação plástica seria igualmente pequena, fato que não corresponde à realidade, já que essas estruturas têm uma capacidade de rotação plástica considerável.

Pode-se considerar que a rotação plástica é dada pelo somatório das rotações provocadas pelo escoamento da armadura em cada fissura de uma seção crítica. Assim, o comprimento de rótula $l_{pl} = 0,6h$ é justificado pela fissuração na zona plastificada, tendo em vista que este comprimento é considerado como compatível com a ocorrência de fissuras na região.

A capacidade de rotação plástica será então dada por:

$$\theta_{pl} = 0,6h \left(\left(\frac{1}{r} \right)_{plástica} - \left(\frac{1}{r} \right)_{elástica} \right) \quad (15)$$

Para o Método 2, tem-se a seguinte equação de compatibilização:

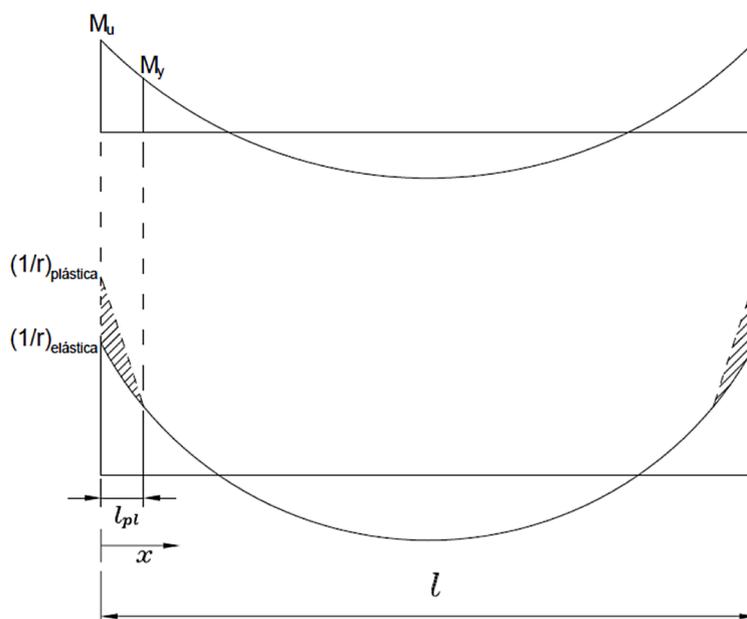


Figura 6 – Viga equivalente com diagramas de momentos fletores e curvatura.

$$\theta_{\text{carga}} = \theta_M + \theta_{pl} \quad (16)$$

Dessa forma, novamente obtém-se a carga de projeto q_d por meio da Equação 8. A partir disso, determina-se valor de M_{d0} pela equação 12 e, finalmente, o valor do coeficiente de redistribuição de momentos para o Método 2, denotado por δ_2 , pela equação 13.

5 Determinação do Coeficiente de Redistribuição

Neste estudo são consideradas três estruturas distintas com a mesma seção transversal, porém com diferentes valores de vão. As duas primeiras estruturas representam vigas com diferentes razões de h/l e a terceira possui uma razão h/l característica de lajes (1/50). Todas as três estruturas têm altura de 55 cm e vãos de 9,00 m, 4,50 m e 27,00 m, sendo representadas pelas nomenclaturas VIGA 1, VIGA 2 e LAJE, respectivamente. Ressalta-se que os valores escolhidos para os vãos buscam simular razões de h/l próximas da realidade.

São realizadas análises com valores de resistência característica do concreto $f_{ck} = 20$ MPa e $f_{yk} = 30$ MPa. Considera-se o aço CA-50 para as armaduras. Ao final de cada análise, comparam-se os resultados com os valores obtidos com os critérios da NBR 6118:2014 descritos no item 3.2.

Como exemplo, são apresentados na Tabela 1 os dados utilizados para a análise das três estruturas para diversos valores de x/d e na Tabela 2 os respectivos dimensionamentos usuais da armadura de aço, ambas considerando $f_{ck} = 20$ MPa. Como a seção transversal das três estruturas é a mesma e apenas os vãos são distintos, elas apresentarão os mesmos valores de M_d e A_s .

Tabela 1 – Dados das três relações de h/l consideradas (concreto classe C20).

DADOS			
	VIGA 1	VIGA 2	LAJE
b (m)	0,20	0,20	0,20
h (m)	0,55	0,55	0,55
d' (m)	0,05	0,05	0,05
d (m)	0,50	0,50	0,50
l (m)	9,00	4,50	27,00
h/l	0,06	0,12	0,02
f_{ck} (MPa)	20,00	20,00	20,00
f_{yk} (kN/cm ²)	50,00	50,00	50,00

Tabela 2 – Dimensionamento usual das estruturas de concreto C20.

DIMENSIONAMENTO (20)				
K_x	kmd	Md (kNm)	kz	A_s (c2)
0,05	0,033	23,57	0,980	1,11
0,10	0,065	46,43	0,960	2,22
0,15	0,096	68,57	0,940	3,36
0,20	0,125	89,29	0,920	4,46
0,25	0,153	109,29	0,900	5,59
0,30	0,180	128,57	0,880	6,72
0,35	0,205	146,43	0,860	7,83
0,40	0,228	162,86	0,840	8,92
0,45	0,228	162,86	0,840	8,92

Além disso, para uma dada resistência do concreto, os valores de curvatura e momento retirados dos diagramas momento-curvatura do programa CAPIBA-MK (SOUZA, 2012) não mudam entre os três casos considerados, uma vez que as três estruturas possuem os mesmos valores das grandezas utilizadas no programa.

Apresentam-se os resultados obtidos para a VIGA 1 como exemplo. A Tabela 3 apresenta os valores dos coeficientes de redistribuição da VIGA 1 considerando-se concreto de classe C20 no Método 1, enquanto a Tabela 4 apresenta os valores obtidos no Método 2.

6 Resultados das Análises

A fim de se realizar uma comparação direta entre as recomendações da NBR 6118 [1] e os dois métodos apresentados neste trabalho, são apresentadas tabelas que comparam os valores de δ para as três estruturas e as duas classes de concreto definidas no item 5. Também são elaborados gráficos que exibem as curvas de tendência dos coeficientes em ambos os métodos.

Os resultados da VIGA 1 são apresentados nas Tabelas 5 e 6. Observa-se que o Método 1 retorna valores de δ menores do que os da NBR 6118:2014 para quase todos os valores de k_x , excetuando-se $k_x = 0,25$, enquanto o Método 2 retorna valores de δ maiores do que os da norma para todos os valores de k_x até 0,35. Os resultados se repetem de forma muito próxima em ambas as classes C20 e C30, que são ilustrados nos gráficos das Figuras 7 e 8. Os critérios normativos são conservadores relativamente à avaliação mais precisa do Método 2.

Tabela 3 – Resultados de δ_1 da VIGA 1 com concreto C20 (Método 1).

MÉTODO 1 – VIGA 1 (C20)										
k_x	M_y (kNm)	1/r elástica (1000/m)	EI elástico (kNm ²)	$\theta_{\max,adm}$ (mrad)	$\theta_{\max,adm}/2$ (mrad)	θ_m (mrad)	θ_{carga} (mrad)	q_d (kNm)	M_{d0} (kNm)	δ_1
0,05	23,77	5,0648	4693	20,00	10,00	22,60	32,60	2,04	34,00	0,693
0,10	46,68	5,6828	8214	30,50	15,25	25,43	40,68	11,00	74,27	0,625
0,15	64,83	5,9945	10815	27,00	13,50	28,53	42,03	14,97	101,02	0,679
0,20	86,02	6,4056	13429	23,00	11,50	29,92	41,42	18,31	123,60	0,722
0,25	106,38	6,8455	15540	19,70	9,85	31,65	41,50	21,23	143,30	0,763
0,30	123,15	7,2928	16887	16,00	8,00	34,26	42,26	23,50	158,59	0,811
0,35	142,12	7,6484	18582	12,50	6,25	35,46	41,71	25,52	172,24	0,850
0,40	160,23	8,0746	19844	8,50	4,25	36,93	41,18	26,90	181,60	0,897
0,45	177,19	8,5853	20639	5,00	2,50	39,09	41,59	28,26	190,75	0,940

Tabela 4 – Resultados de δ_2 da VIGA 1 com concreto C20 (Método 2).

MÉTODO 2 – VIGA 1 (C20)										
k_x	M_y (kNm)	EI elástico (kNm ²)	θ_m (mrad)	1/r elástica	1/r plástica (1000/m)	θ_{pl} (mrad)	θ_{carga} (mrad)	q_d (kNm)	M_{d0} (kNm)	δ_2
0,05	23,77	4693	22,60	5,0648	21,9175	5,56	28,16	4,35	29,37	0,803
0,10	46,68	8214	25,43	5,6828	23,1508	5,76	31,20	8,44	56,95	0,815
0,15	64,83	10815	28,53	5,9945	24,1560	5,99	34,53	12,29	82,98	0,826
0,20	86,02	13429	29,92	6,4056	25,3604	6,26	36,17	15,99	107,95	0,827
0,25	106,38	15540	31,65	6,8455	26,7478	6,57	38,21	19,55	131,97	0,828
0,30	123,15	16887	34,26	7,2928	23,7000	5,41	39,68	22,06	148,89	0,864
0,35	142,12	18582	35,46	7,6484	20,1591	4,13	39,59	24,22	163,48	0,896
0,40	160,23	19844	36,93	8,0746	17,5278	3,12	40,05	26,16	176,61	0,922
0,45	177,19	20639	39,09	8,5853	15,5037	2,28	41,37	28,11	189,76	0,945

Tabela 5 – Resultados do coeficiente δ da VIGA 1 com concreto C20.

VIGA 1 (C20)					
k_x	δ_1	δ_2	δ (NBR)	δ_1/δ	δ_2/δ
0,05	0,693	0,803	0,750	0,924	1,070
0,10	0,625	0,815	0,750	0,834	1,087
0,15	0,679	0,826	0,750	0,905	1,102
0,20	0,722	0,827	0,750	0,963	1,103
0,25	0,763	0,828	0,753	1,013	1,101
0,30	0,811	0,864	0,815	0,995	1,060
0,35	0,850	0,896	0,878	0,969	1,021
0,40	0,897	0,922	0,940	0,954	0,981
0,45	0,940	0,945	1,000	0,940	0,945

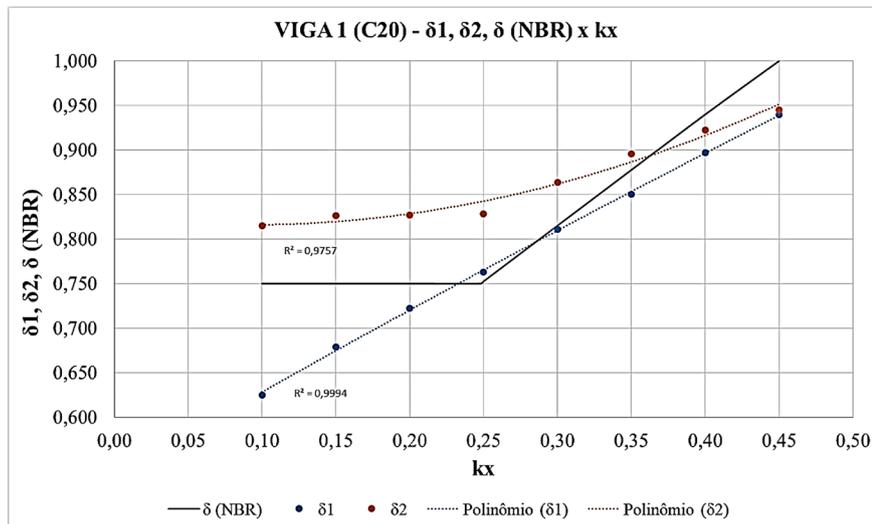


Figura 7 – Gráfico do coeficiente δ em função de k_x da VIGA 1 com concreto C20.

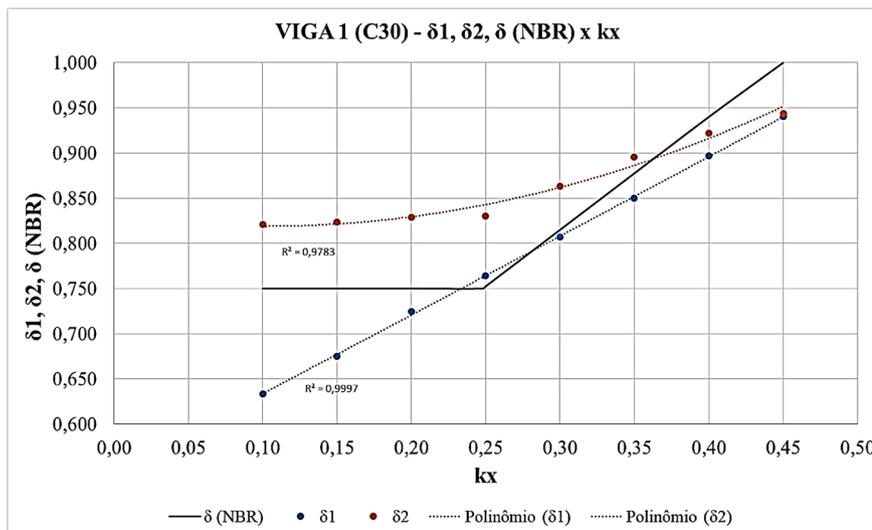


Figura 8 – Gráfico do coeficiente δ em função de k_x da VIGA 1 com concreto C30.

Tabela 6 – Resultados do coeficiente δ da VIGA 1 com concreto C30.

VIGA 1 (C20)					
k_x	δ_1	δ_2	δ (NBR)	δ_1/δ	δ_2/δ
0,05	0,693	0,803	0,750	0,924	1,070
0,10	0,634	0,821	0,750	0,845	1,094
0,15	0,675	0,824	0,750	0,900	1,098
0,20	0,725	0,829	0,750	0,967	1,105
0,25	0,764	0,830	0,753	1,015	1,103
0,30	0,807	0,864	0,815	0,990	1,060
0,35	0,850	0,896	0,878	0,969	1,021
0,40	0,897	0,922	0,940	0,954	0,981
0,45	0,940	0,944	1,000	0,940	0,944

Tabela 7 – Resultados do coeficiente δ da VIGA 2 com concreto C20.

VIGA 1 (C20)					
k_x	δ_1	δ_2	δ (NBR)	δ_1/δ	δ_2/δ
0,05	0,531	0,670	0,750	0,707	0,894
0,10	0,455	0,688	0,750	0,606	0,917
0,15	0,514	0,704	0,750	0,685	1,102
0,20	0,565	0,705	0,750	0,754	0,940
0,25	0,616	0,707	0,753	0,819	0,939
0,30	0,682	0,760	0,815	0,836	0,932
0,35	0,739	0,811	0,878	0,843	0,924
0,40	0,813	0,855	0,940	0,865	0,910
0,45	0,887	0,895	1,000	0,887	0,895

Tabela 8 – Resultados do coeficiente δ da LAJE com concreto C20.

VIGA 1 (C20)					
k_x	δ_1	δ_2	δ (NBR)	δ_1/δ	δ_2/δ
0,05	0,871	0,924	0,750	1,162	1,232
0,10	0,833	0,930	0,750	1,111	1,240
0,15	0,864	0,935	0,750	1,152	1,246
0,20	0,886	0,935	0,750	1,182	1,246
0,25	0,906	0,935	0,753	1,204	1,243
0,30	0,928	0,950	0,815	1,138	1,166
0,35	0,945	0,963	0,878	1,076	1,097
0,40	0,963	0,973	0,940	1,025	1,035
0,45	0,979	0,981	1,000	0,979	0,981

Os resultados da VIGA 2 para concreto de classe C20 são apresentados na Tabela 7. Neste caso, ambos os métodos fornecem resultados de δ menores do que os valores previstos pela NBR 6118:2014 para todos os valores de k_x , o que é ilustrado pela Figura 9. Além disso, novamente as duas classes de concreto consideradas retornam valores de δ muito próximos em ambos os métodos da VIGA 2, similarmente ao que foi demonstrado para a VIGA 1 nas Tabelas 5 e 6 e Figuras 7 e 8. Os critérios normativos são sempre conservadores.

Os resultados da LAJE para concreto de classe C20 são apresentados na Tabela 8. Para esta última estrutura, os dois métodos fornecem resultados de δ maiores do que os da NBR 6118:2014 para quase todos os valores de k_x , o que é evidenciado na Figura 10. Mais uma vez, os valores obtidos para as duas classes de concreto estudadas nos dois métodos para a LAJE são muito similares, igualmente ao que ocorreu para a VIGA 1 e a VIGA 2. Os critérios normativos seriam

sempre não conservadores, o que justifica a limitação normativa de $k_x = 0,25$ para o cálculo plástico pelo Método das Charneiras Plásticas.

6.1 Exemplos de avaliação do comprimento de rótula

O comprimento de rótula plástica é um dado essencial para a determinação da rotação plástica. Assim, é muito importante se utilizar um valor compatível com a realidade. O valor aqui utilizado para o comprimento de rótula plástica foi igual a $0,6h = 0,33$ m. Com o objetivo de se avaliar a validade deste valor nas análises plásticas apresentadas, este valor é comparado com os obtidos com fórmulas apresentadas por outros autores.

No exemplo considerado, considerou o caso com $k_x = 0,25$ da VIGA 1 e com concreto de classe C20. A Tabela 9 apresenta todos os dados utilizados para o cálculo do comprimento de rótula plástica L_p . Todas

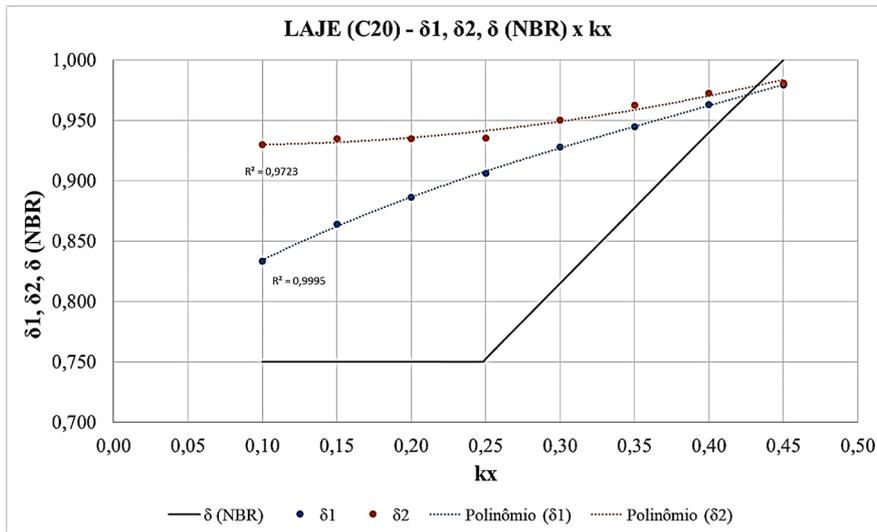


Figura 9 – Gráfico do coeficiente δ em função de k_x da VIGA 2 com concreto C20.

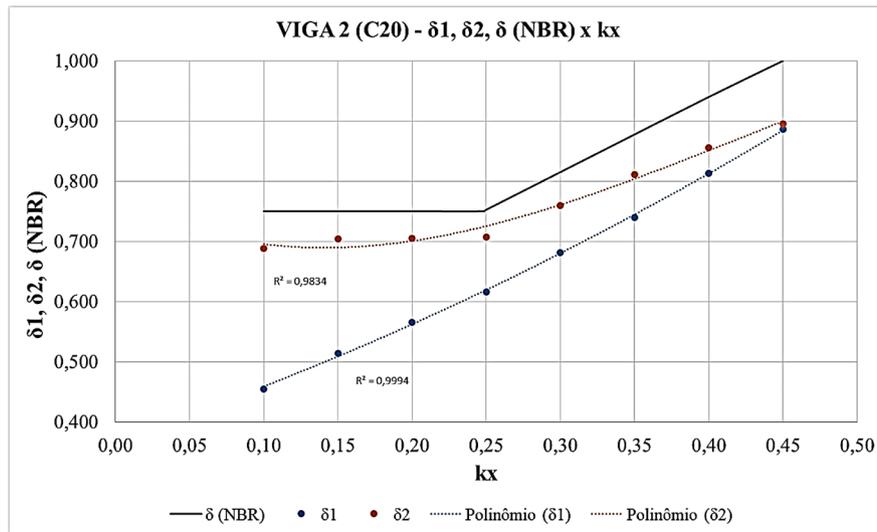


Figura 10 – Gráfico do coeficiente δ em função de k_x da LAJE com concreto C20.

as grandezas utilizadas foram descritas anteriormente com exceção de db, que representa a bitola da armadura utilizada no dimensionamento e L_s, que é a distância da seção de momento máximo até a seção de momento nulo.

Os valores dos momentos no escoamento M_y e na ruptura M_u foram obtidos pelo programa CAPIBA-MK (SOUZA, 2012), bem como os valores de deformações específicas no escoamento ε_{ce} e na ruptura ε_{cu}.

O cálculo do comprimento L_s considera a extensão do trecho de momento negativo da viga biengastada. O momento fletor de uma viga biengastada de comprimento L sujeita a um carregamento unifor-

memente distribuído q_d, em função da distância horizontal x, é dado pela equação:

$$M(x) = -\frac{q_d x^2}{2} + \frac{q_d Lx}{2} - \frac{q_d L^2}{12} \quad (17)$$

Igualando-se o momento a zero, pode-se determinar a distância da seção de momento negativo máximo até a seção de momento nulo. Assim, obtém-se L_s = 0,211L. Para a estrutura VIGA 1, portanto, L_s = 1,90 m.

Tabela 9 – Dados utilizados para o cálculo do comprimento de rótula plástica.

DADOS (VIGA 1 – C20)	
K_x	0,25
b (m)	0,20
h (m)	0,55
d (m)	0,50
L (m)	9,00
$L_s = z$ (m)	1,90
M_y (kNm)	106,38
M_u (kNm)	110,71
F_y (MPa)	500
db (mm)	5
ϵ_{cc}	0,00134
ϵ_{cu}	0,00339

A Tabela 10, baseada nos trabalhos de ZHAO *et al.* (2011), ARBULU (2006) e XU *et al.* [6], lista formulações propostas por alguns autores para o comprimento de rótula plástica L_p em vigas, onde se observam as equações propostas, os parâmetros estudados em cada modelo e o resultado de comprimento de rótula obtido a partir de cada uma para a estrutura considerada.

Tabela 10 – Comprimentos de rótula plástica obtidos a partir das referências.

REFERÊNCIA	FORMULAÇÃO PROPOSTA	PARÂMETROS ESTUDADOS	L_p (m)
BAKER (1956)	$L_p = kd \left(\frac{z}{d}\right)^{1/4}$ $0,5h < L_p < h$	Altura da seção	0,3490 (para $k = 0,5$)
SAWYER (1964)	$L_p = 0,25d + 0,075L_s$	Altura da seção, vão, deformação plástica	0,2674
CORLEY (1966)	$L_p = 0,5d + 0,032 \frac{L_s}{\sqrt{d}}$	Altura da seção, vão	0,3359
MATTOCK (1967)	$L_p = 0,5d + 0,05L_s$	Altura da seção, vão	0,3450
ASI-ASCE Committee 428 (1968)	$\text{Min} \left[R_\epsilon \left(\frac{d}{4} + 0,03L_s R_m \right), R_\epsilon d \right] \leq L_p \leq R_\epsilon \left(\frac{d}{2} + 0,10 L_s R_m \right)$ $R_\epsilon = \frac{0,004 - \epsilon_{cc}}{\epsilon_{cu} - \epsilon_{cc}}$ $R_m = \frac{M_{max} - M_y}{M_u - M_y}$	Altura da seção, vão, deformação plástica	$0,2361 \leq L_p \leq 0,5708$
PAULAY e PRIESTLEY (1992)	$L_p = 0,08L_s + 0,022f_y d_b \geq 0,044f_y d_b$	Altura da seção, vão, propriedades da armadura	0,2069
PANAGIOTAKOS e FARDIS (2001)	$L_{p,cr} = 0,12L_s + 0,014a_{sl}f_y d_b$ $L_{p,non} = 1,5L_{p,cr} = 0,18L_s + 0,02a_{sl}f_y d_b$	Vão, propriedades da armadura	0,3918
EUROCÓDIGO 2 (2010)	$L_p = 0,6h$	Altura da seção	0,3300

7 Conclusões

Neste artigo foram apresentados dois métodos de cálculo para a determinação do coeficiente de redistribuição de esforços considerando o efeito da plastificação em estruturas de concreto armado, determinando-se a sua capacidade de rotação plástica. A partir disso, uma análise comparativa foi realizada entre os dois métodos e os valores preconizados pela NBR 6118:2014. Também se realizou uma análise comparativa da equação utilizada para o comprimento de rótula plástica neste trabalho com formulações de outros autores para esta grandeza.

Os resultados apresentados indicam que os valores de δ são muito influenciados pela relação altura da seção/vão da estrutura, de forma que eles tendem a ser menores para maiores valores de h/l , que representam estruturas menos esbeltas. Assim, quanto maior a relação h/l , menor é o valor de δ .

Em ambos os métodos pode-se constatar que a VIGA 2 retornou os menores valores de δ , concluindo-se que estruturas menos esbeltas propiciam uma redistribuição de solicitações muito maior quando considerada a plastificação. Ambos os métodos resultaram em valores de δ menores do que os previstos pela Norma. Enquanto isso, para vigas mais esbeltas como o caso da VIGA 1, maiores resultados de δ foram

obtidos em comparação a VIGA 2. Portanto, o aumento da esbeltez da viga em ambos os métodos elevou de maneira significativa os valores do coeficiente de redistribuição. Nos casos das vigas, a NBR 6118:2014 é então conservadora.

A laje, elemento estrutural mais esbelto estudado neste trabalho, mostrou que a norma somente é mais conservadora para valores de k_x superiores a 0,43 aproximadamente considerando-se os dois métodos. Neste caso, os valores de δ são relativamente grandes, próximos da unidade, fato que demonstra a dificuldade em se realizar a redistribuição de esforços em lajes. Isso justifica as restrições colocadas pela norma na aplicação do Método das Charneiras Plásticas em lajes.

Os exemplos estudados também demonstram que os valores de δ são muito pouco afetados pela diferença de classes de concreto. Para as três razões de h/l consideradas, as curvas de tendência δ são praticamente iguais para classes de concreto C20 e C30. Nestes casos, a redistribuição de esforços da análise plástica depende da geometria da estrutura e não da classe de resistência do concreto.

A comparação do comprimento de rótula plástica utilizado neste trabalho com equações propostas por diversos autores mostra que a definição desta grandeza ainda é incerta, haja vista que há certa discrepância entre os valores obtidos para uma mesma estrutura. As equações obedecem a dados experimentais e não a uma formulação analítica. Entretanto, percebe-se que em todas as fórmulas listadas na Tabela 10, elas retornam valores na mesma ordem de grandeza de 0,33 m. Portanto, o comprimento de rótula plástica considerado neste artigo é coerente com trabalhos anteriores acerca deste tema, indicando que a

capacidade de rotação plástica aqui calculada apresenta valores aceitáveis.

8 Referências

- ARBULU, A. G. B. Plastic hinge length in high-rise concrete shear walls. Thesis (Master of Applied Science) – The University of British Columbia, Vancouver, 2006.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS ABNT. NBR 6118 – Projeto de estruturas de concreto – Procedimento, Rio de Janeiro, 2014.
- COMITÊ EUROPEU DE NORMALIZAÇÃO CEN. Eurocódigo 2 – Projecto de estruturas de betão – Parte 1-1: Regras gerais e regras para edifícios, Bruxelas, 2004.
- QUEIROZ, D. F. C. S. Avaliação da capacidade de rotação plástica em lajes e vigas de concreto armado. Projeto de Graduação, Departamento de Estruturas, Escola Politécnica da UFRJ, Rio de Janeiro, 2019.
- SOUZA JR, P. J. Análise de pórticos de concreto armado em condições sísmicas considerando o modelo de Mander. Dissertação (Mestrado em Projeto de Estruturas) – Programa de Projeto de Estruturas, Escola Politécnica da UFRJ, Rio de Janeiro, 2012.
- XU, L.; PAN, J.; LU, C.; YIN, W. Development mechanism of plastic hinge in reinforced engineered cementitious composite beams under monotonic loading. *Structural Concrete*, v. 20, p. 252-266. 2019.
- ZHAO, X.; WU, Y.; LEUNG, A. Y.; LAM, H. F. Plastic Hinge Length in Reinforced Concrete Flexural Members. *Procedia Engineering*, v. 14, p. 1266-1274. 2011.