

Influência da Flexibilidade dos Apoios em Lajes Maciças de Concreto Armado

Paulo Ricardo Alves dos Reis Santos¹

Jefferson de Brito Sousa²

Max Silva de Almada³

Lirana Lamara Barreto da Silva⁴

Resumo

Ao longo de muitos anos foram utilizados de métodos simplificados para dimensionar estruturas. No caso das lajes estes métodos tratam estes elementos de forma isolada, apoiando-se em elementos indeformáveis, não havendo assim a consideração da interação entre os elementos estruturais que compõem uma edificação, o que pode resultar em uma análise equivocada no comportamento da estrutura. No entanto, com o avanço tecnológico, surgiram novas metodologias de cálculo que passaram a ser incorporadas ao dimensionamento das estruturas, destacando-se o processo de Analogia de Grelha, o qual possibilita uma análise global e integrada de todos os elementos que compõe uma estrutura. Desta forma, o presente trabalho visa verificar o quão a consideração da flexibilidade dos apoios das lajes, influencia em seu comportamento estrutural. Onde, por meio de um estudo comparativo entre as solicitações obtidas pelo do método tradicional de cálculo, por meio da tabela de Bares, e o processo de analogia de grelha, fazendo uso do *software* Eberick V10, busca-se verificar parâmetros que permitam uma análise estrutural cada vez mais condizente com o real comportamento da estrutura. Assim, com este estudo, podemos verifica-se que o comportamento estrutural apresentado, no que se refere a distribuição de solicitações nas lajes, são diferentes para cada método de dimensionamento, sendo a deformabilidade dos apoios das lajes um dos fatores influenciadores neste comportamento.

Palavras-chave: Lajes; Análise estrutural; Analogia de grelha.

Introdução

Por muito tempo as estruturas foram dimensionadas por meio dos métodos simplificados, os quais tratam a estrutura e seus elementos de forma isolada, não considerando a interação entre os mesmos. No entanto, com o avanço tecnológico, surgiram novas metodologias de cálculo que passaram a ser incorporadas ao dimensionamento das estruturas, onde, com o uso de *softwares*, busca-se realizar uma simulação cada vez mais realista de seu comportamento. Dentre esses métodos destaca-se o processo de analogia de grelha.

No que diz respeito as lajes, Debella (2015) relata que para se realizar a análise de uma laje por analogia de grelha, é necessário discretizá-la em uma série de faixas com determinada largura. Estas faixas, por sua vez, podem ser substituídas por elementos de barra coincidentes com seu eixo, originando então uma grelha de barras.

Este método faz parte da rotina de cálculo de

diversos *softwares* de cálculo estrutural, a exemplo do Eberick, da empresa AltoQi, pois permite que seja efetuada uma modelagem tridimensional da estrutura, possibilitando assim uma análise global e integrada de todos os elementos que a compõe, o que o difere do cálculo analítico, que por sua vez, trata da estrutura de forma isolada, sem levar em conta a interação entre os elementos laje, viga e pilar, e em alguns casos especiais, que fogem a prática comum dos projetistas, realizando-se aproximações e simplificações que podem ocasionar, segundo Kirst (2010), o superdimensionamento da estrutura, o que, conseqüentemente, eleva os custos da estrutura com material. Ou até mesmo seu subdimensionamento, colocando em risco a utilização do elemento estruturalmente, podendo este, vir ao colapso.

Desta forma, o presente trabalho visou verificar o quão a consideração da flexibilidade dos apoios das lajes, influencia em seu comportamento estrutural. Onde, por meio de um estudo comparativo entre os resultados obtidos através do método tradicional de

^{1,2,3,4} Centro Universitário de Ciências e Tecnologias do Maranhão – UNIFACEMA /pauloricardo.ars@gmail.com / jeffersonbrito2@gmail.com /maxalmada.eng@gmail.com/ liranalamara11@gmail.com

cálculo, por meio da tabela de Bares, e o processo de analogia de grelha, fazendo uso do *software* Eberick V10, buscou-se verificar parâmetros que permitam uma análise estrutural cada vez mais condizente com o real comportamento da estrutura, possibilitando que o dimensionamento desses elementos estruturais englobe uma maior gama de variáveis, tornando-o cada vez mais refinado.

Lajes de Concreto armado

As lajes podem ser definidas como elementos planos bidimensionais destinados a receber grande parte das solicitações a que uma construção está submetida. Estas solicitações provêm de pessoas, móveis, pisos, paredes, entre outros tipos de cargas as quais a laje pode ser demandada. Estas ações atuam perpendicularmente ao plano da laje, e variam conforme o uso do espaço físico que a laje faz parte, podendo ser divididas em: forças concentradas, ações distribuídas linearmente e ações distribuídas na área da laje. Podem ocorrer também, ações externas na forma de momentos fletores, que atuam nas bordas das lajes, porém sendo este tipo de solicitação bem menos comum que as demais (BASTOS, 2008).

As lajes de concreto armado podem ser classificadas segundo à sua forma (quadrada, retangular, triangular, circular, *etc.*), quanto à sua natureza (maciças, nervuradas, pré-fabricadas, *etc.*), de acordo com o tipo de armação (armadas em uma direção e armadas em cruz), e também quanto ao tipo de apoio (apoio contínuo, discreto, *etc.*) (CUNHA e SOUZA, 1998).

Nesse sentido, as lajes maciças são aquelas onde a espessura do elemento é completamente preenchida por concreto, possuindo inseridas armaduras longitudinais de flexão e casualmente também armaduras transversais (BASTOS, 2008). Estas, podem ser de concreto armado ou de concreto protendido. Ainda conforme Bastos (2008), esses tipos de lajes possuem espessuras que podem variar de 7 cm a 15 cm, sendo projetadas para os mais diversos tipos de construções, desde um edifício com múltiplos pavimentos até estruturas de grande porte, como pontes de grandes vãos. O presente trabalho, tratará especificamente sobre as lajes maciças de concreto armado.

Ademais, as lajes podem ser denominadas de placas, em razão da sua geometria. A ABNT NBR 6118/2014, define esses elementos como “elementos de superfície plana, sujeitos principalmente a ações normais a seu plano”. Os elementos de placas são tidos como estruturas planas, em que duas de suas dimensões são maiores que uma terceira, carregadas perpendicularmente ao seu plano (DEBELLA, 2015).

Teoria Geral das placas

O estudo das placas, em geral em regime elástico, é regido pela Teoria das Placas de Kirchhoff, a qual é explanada de forma detalhada em Timoshenko (1959) e Bares (1972). Segundo Reis (2007), há algumas hipóteses adotadas na teoria de Kirchhoff, considerando placas finas e com pequenas flexas.

1. A placa é constituída por um material elástico linear, isotrópico e homogêneo;
2. A placa possui espessura muito pequena quando comparada as demais dimensões;
3. Os valores de deslocamentos sofridos são muito inferiores à espessura da placa;
4. Ocorrem rotações na superfície média deformada consideradas muito pequenas quando comparadas à unidade;
5. As linhas retas, de início perpendiculares à superfície média, continuam retilíneas e normais à superfície média após deslocamentos sofridos;
6. As deflexões ocorridas na placa são perpendiculares ao plano indeformado inicial;
7. Despreza-se as tensões normais sobre a superfície média;
8. Carvalho e Figueiredo Filho (2004), em seu trabalho, apontam ainda outras considerações para simplificar o problema de obtenção de esforços por meio da Teoria das Placas e possibilitar o emprego das condições de contorno. São citadas: a não ocorrência da transmissão de momentos torsores às vigas, as ações são consideradas uniformemente distribuída e não se propagam para os pilares, as vigas de bordo são consideradas indeformáveis na vertical e a rotação das placas é livre ou engastada.
9. Para a modelação matemática do problema, parte-se do princípio do equilíbrio de forças e momentos aplicado a um elemento infinitesimal de placa, com dimensões dx , dy e h , sendo este submetido a um carregamento distribuído $q(x,y)$, conforme ilustram as Figuras 1 e 2 (REIS, 2007).

Utilizando-se das equações do equilíbrio, realiza-se o somatório de forças segundo o eixo z e o somatório dos momentos em relação ao eixo x e y sob a resultante da carga distribuída e daí origina-se a equação diferencial do equilíbrio das placas, dada por:

$$\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} = -q \quad (1)$$

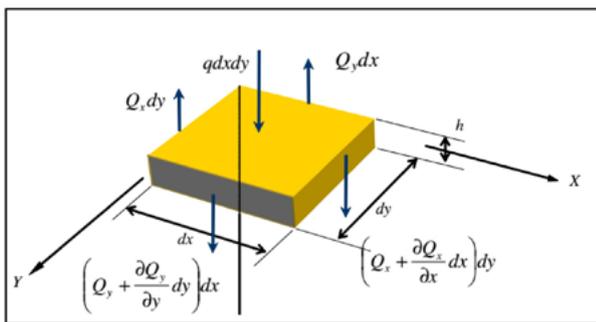


Figura 1 – Equilíbrio de forças (COELHO, 2000).

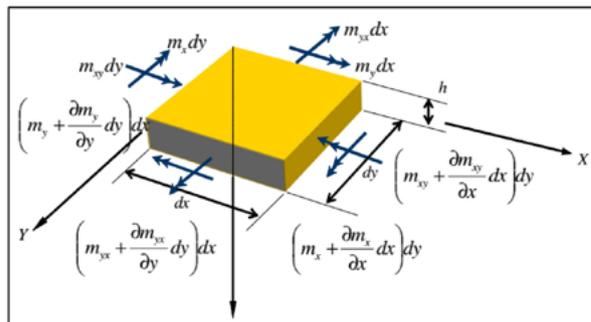


Figura 2 – Equilíbrio de momentos (COELHO, 2000).

Segundo Reis (2007) é possível obter a equação básica fundamental das placas delgadas a partir da equação do equilíbrio das placas, fazendo uso de formulações que relacionam solicitações e deslocamentos da Resistência dos Materiais e tomando por base as hipóteses de Kirchoff-Love, sendo dada por:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D} \quad (2)$$

De acordo Banki (2013), a solução exata fechada de placas, encontrada por intermédio de métodos algébricos é muito limitada, sendo restrita a poucos casos e com poucas aplicações práticas.

Utilização de Tabelas

Conforme Zenzen (2012), as tabelas, que em geral são utilizadas no processo de dimensionamento das lajes maciças de concreto armado, se originaram da resolução da equação geral das placas por séries. Por meio destas torna-se possível determinar os momentos fletores e deslocamentos máximos apenas com base na geometria e nas condições de vinculação da placa.

O pavimento, deve ser, portanto, segmentado, isto é, suas lajes devem ser tratadas de forma isolada, de acordo com a sua vinculação às lajes vizinhas, podendo estas vinculações serem simplesmente apoiadas, engastadas ou livres. Comumente considera-se o engaste das lajes mais rígidas e maiores, nas lajes menos rígidas e menores (CARVALHO e FIGUEIREDO FILHO, 2004).

No caso da utilização das tabelas para painéis contínuos de lajes, estando estas apoiadas em vigas, Gontijo (2015) afirma que devem ser aplicados critérios de simplificação com vistas a correção de esforços devido à existência da continuidade, gerando uma redistribuição de solicitações na laje. E ainda, nos casos em que as lajes estejam apoiadas em vigas, estas

geralmente são consideradas indeformáveis, isto é, tem sua flexibilidade desprezada, o que pode provocar em alguns casos, discrepâncias nos valores das solicitações e deslocamentos verticais sofridos pela laje.

Existe uma vasta bibliografia que abrangem tabelas para o cálculo das solicitações e deslocamentos em lajes, como as tabelas de Czerny, Kalmanok, Bares, entre outras.

De acordo com Araújo (2003), pode-se notar algumas diferenças entre estas tabelas, em razão, principalmente, do coeficiente de Poisson adotado e das aproximações decorrentes do truncamento das séries de Fourier.

No presente trabalho será utilizada a tabela de Bares (1972), a qual terá sua metodologia explanada adiante.

Tabelas de Bares

Bares (1972) foi responsável pelo desenvolvimento de tabelas das quais se extraem coeficientes utilizados para determinar os momentos fletores em lajes. Conforme explanado, há influência do coeficiente de Poisson nos valores finais obtidos. A tabela que será utilizada no presente trabalho foi adaptada por Pinheiro (2007), na qual o coeficiente de Poisson adotado era igual a 0,2.

A fim de se obter o coeficiente “μ” relacionado ao momento fletor, deve-se antes calcular o parâmetro λ, o qual se refere a geometria da laje, expresso por:

$$\lambda = \frac{l_y}{l_x} \quad (3)$$

onde

λ – Parâmetro que define a geometria da laje;

l_y – A maior das dimensões da superfície da placa;

l_x – A menor das dimensões da superfície da placa;

Determinado o parâmetro λ pode-se determinar os momentos fletores máximos positivos nas direções x e y, $m_{x/y}^+$ que solicitam a laje.

$$m_x^+ = \mu_x \cdot \frac{pl_x^2}{100} \quad (4)$$

$$m_y^+ = \mu_y \cdot \frac{pl_y^2}{100} \quad (5)$$

onde

p – carregamento o qual a placa está submetida;

μ_x e μ_y – coeficientes fornecidos pela tabela.

Pode-se obter também os momentos fletores máximos negativos nas direções x e y que solicitam a laje, caso estes existam.

$$m_x^- = \mu'_x \cdot \frac{pl_x^2}{100} \quad (6)$$

$$m_y^- = \mu'_y \cdot \frac{pl_y^2}{100} \quad (7)$$

onde

p – carregamento o qual a placa está submetida;

μ_x e μ_y – coeficientes fornecidos pela tabela.

De acordo com Pinheiro (2007) em um pavimento, geralmente, as lajes adjacentes diferem em suas condições de bordo, nos vãos teóricos ou nos carregamentos, o que acaba gerando resultados de momentos negativos distintos nas continuidades. Há então, a necessidade de realizar a compatibilização destes.

Para a realização da compatibilização o critério usual consiste em adotar o maior valor entre a média dos dois momentos e 80% do maior. O referido critério de compatibilização é dado por

$$m^- \geq \begin{cases} 0,8 \cdot m_{maior}^- \\ \frac{m_{maior}^- + m_{menor}^-}{2} \end{cases} \quad (8)$$

Contudo, há limitações quanto ao uso destas tabelas, visto que somente podem ser empregadas para configurações de apoios em que as lajes estejam com suas bordas totalmente apoiadas, engastadas ou livres (DEBELLA, 2015). Além desta limitação, também podemos citar o fato de se aplicarem somente a casos em que as lajes tenham geometria simples.

Processo de Analogia de Grelha

O processo de Analogia de Grelha, consiste na substituição de um pavimento por uma grelha equivalente, onde as barras que a compõe, representam os elementos estruturais que constituem o pavimento, ou seja, as lajes e as vigas. Tal processo possibilita a reprodução do comportamento da estrutura de pavimentos com geometrias variadas, podendo ser composto por lajes maciças de concreto armado, apoiadas em vigas ou não, assim como por lajes nervuradas.

Para tanto é necessário discretizar a laje em sua série de faixas com determinada largura (DEBELLA, 2015). A largura dessas faixas depende da geometria do pavimento e de suas dimensões. Pressupondo-se que estas faixas possam ser substituídas por elementos estruturais de barra exatamente sobre seu eixo, é gerada, desta forma uma grelha de barras análoga ao pavimento, Figura 3.

Conforme Reis (2007) pode-se tratar as grelhas como um conjunto de vigas individuais e interconectadas em seus pontos nodais.

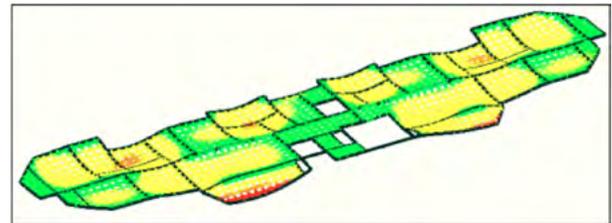


Figura 3 – Pavimento de edifício em modelo de Analogia de Grelha (Banki, 2013).

No que diz respeito aos carregamentos Carvalho (1994) aponta que as cargas distribuídas que solicitam o pavimento, se dividem entre os elementos de barra que compõe a grelha equivalente, levando em conta a área de influência de cada um. Estas cargas podem ser consideradas distribuídas uniformemente ao longo dos elementos da grelha, ou mesmo concentradas nos seus nós. Ainda conforme Carvalho (1994), a rigidez a flexão e a torção da placa nas duas direções são tratadas como concentradas nos elementos correspondentes da grelha equivalente, devendo ter valores de modo que ao se submeter a estrutura real e a da grelha análoga, estas tenham mesma deformação e esforços internos em seções correspondentes das duas estruturas. Assim, utilizando-se malhas adequadas e definindo as rigidezes de modo coerente pode-se obter valores de deslocamento e solicitações razoáveis.

Debella (2015) afirma que o fato de as lajes poderem assumir diversas formas e serem submetidas a diversos tipos de carregamento, a malha ideal não segue um padrão pré-definido. No entanto algumas

considerações para lajes retangulares são apontadas por Hambly (1976) e em Reis (2007):

- a) buscar identificar barras da grelha que estejam em posições pré-determinadas no projeto, como linhas de apoio ao longo das vigas de extremidade, assim como de outras caso existam, que contenham uma ação específica;
- b) para casos de lajes isotrópicas, cada uma das barras deve ter no máximo largura correspondente a $\frac{1}{4}$ do vão transversal ao seu eixo;
- c) para casos de lajes ortótropas, na direção da menor inércia, tem-se que considerar a largura das barras equivalente a 40% do vão transversal ao seu eixo. No caso de dúvidas quanto a ortotropia da laje, considera-se o exposto no item b);
- d) quanto maior a densidade da malha, mas apurados serão os resultados. Porém, essa melhora cessa quando a largura das barras for de duas ou três vezes menor que a espessura da laje;
- e) no caso da existência de balanço na laje, torna-se necessário colocar ao menos duas barras transversais ao vão em balanço.
- f) é necessário colocar uma linha de barras no contorno livre da laje, as quais, a largura tem que ser subtraída de 0,3h;
- g) nas regiões onde há uma grande concentração de cargas, como por exemplo, apoios ou cargas concentradas, é recomendado dispor uma malha cuja largura deve ser menor do que três a quatro vezes a espessura da laje.

Deve-se deixar claro que as considerações apontadas devem sofrer as adaptações necessárias a cada situação de laje na qual se pretende trabalhar.

O método de analogia por grelhas é muito interessante do ponto de vista prático, já que é de fácil automatização. Tendo-se em mãos os momentos solicitantes em faixas correspondentes as vigas, o dimensionamento à flexão de cada faixa se torna similar ao de uma viga de concreto armado, onde a sua largura irá ser equivalente a área de influência da faixa e sua altura igual à espessura da laje, desprezando-se os esforços cortantes (KIRST, 2010).

Atualmente, diversos *softwares* de dimensionamento de estruturas de concreto armado incorporaram esse método à sua rotina de cálculo, para a obtenção dos momentos fletores e dos deslocamentos em lajes.

Influência da flexibilidade dos apoios em lajes

No ramo científico, diversos são os trabalhos na área de análise estrutural de lajes que têm enfoque na verificação da influência da flexibilidade dos apoios (vigas) na distribuição de solicitações das lajes, dentre eles podemos ressaltar os trabalhos de Simonian (2009), Banki (2013), Coelho (2013), Gontijo (2015).

Simonian (2009), em seu trabalho, estabeleceu a comparação entre os resultados gerados pelo processo das tabelas de Czerny, o qual trata a laje apoiada em elementos rígidos, e pelo Método dos Elementos Finitos (MEF), considerando a laje apoiada em vigas deformáveis. A partir disso, foi concluído que tanto os momentos quanto as flechas geradas pelo MEF, considerando a flexibilidade dos apoios das lajes, foram maiores que os obtidos por meio da tabela de Czerny, ratificando a ideia de este parâmetro influencia na distribuição dos esforços nas lajes.

Uma análise similar a exposta anteriormente foi feita também por Gontijo (2015), onde foi dimensionado um painel de lajes por meio das tabelas de Czerny, pelo MEF, com modelagem por meio do *software* SAP2000, e por analogia de grelha, com modelagem pelo *software* Eberick V9. Por intermédio da análise comparativa dos resultados gerados pelos três métodos, de uma forma geral chegou-se à conclusão de que as diferenças mais significativas entre os valores de momentos fletores obtidos se deram em razão da forma de consideração dos apoios das lajes em cada método, tratados como rígidos (indeformáveis) no processo de Czerny, enquanto que nos métodos da Analogia de Grelha e Elementos Finitos há a consideração da influência da rigidez dos elementos que compõem o painel como um todo.

Nos trabalhos de Banki (2013) e Coelho (2013), são realizadas análises onde estas demonstram que para um caso de uma laje quadrada 4 m x 4 m com 10 cm de espessura, adotando-se diversas alturas de viga com largura fixa de 12 cm, os resultados de momentos e flechas obtidos através da teoria da elasticidade e pela Analogia de Grelha praticamente idênticos. O mesmo não aconteceu quando se analisou um painel com duas lajes retangulares 4 m x 6 m, justapostas, com uma viga intermediária. Observou-se que, conforme se reduzia rigidez desta viga, chegou-se a resultados em que o momento calculado, antes negativo, devido a alta rigidez adotada, passou a ser positivo, em uma situação com uma viga com rigidez menor. Em suma, os resultados expostos nos possibilitam dizer que os processos simplificados para a análise de lajes isoladas, fornecem resultados próximos aos da Analogia de Grelha quando se trabalha com lajes retangulares ma-

çias com apoios muito rígidos. No caso de lajes nervuradas ou lajes apoiadas em vigas com seções usuais, menos rígidas, pode-se ter resultados bem discrepantes. A Figura 4 mostra o que o efeito de deformação das vigas ocasiona nas lajes.

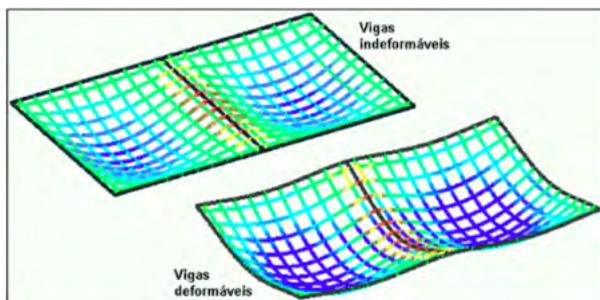


Figura 4 – Influência das vigas nos modelos das lajes (Banki, 2013).

Desta forma realizar estudos deste tipo, torna-se bastante relevante e necessário, a fim de contribuir para o campo da análise estrutural, buscando-se realizar dimensionamentos cada vez mais refinados.

Tipo e abordagem da pesquisa

Com base no objetivo deste trabalho, pôde-se inferir que este tem natureza explicativa. Este tipo de pesquisa, segundo Gil (2002) têm como principal preocupação apontar os fatores que irão determinar ou que possam contribuir para a ocorrência de um dado fenômeno.

Quanto a abordagem da pesquisa realizada, podemos defini-la como quantitativa, já que os dados obtidos são de caráter numérico, os quais foram utilizados para a análise da interação entre as variáveis envolvidas e interpretação do problema estudado, características estas, que, de acordo com Prodanov e Freitas (2013), são de uma pesquisa essencialmente quantitativa.

A tipologia do referido estudo é de caráter experimental. Neste tipo de pesquisa, conforme Gil (2002), determina-se um objeto de estudo, a partir do qual serão realizadas uma série de análises acerca das variáveis que o envolvem, e que o influenciam. Desta forma, aqui foram analisadas variáveis que estão relacionadas às lajes, objeto de estudo, como: os momentos fletores e a deformabilidade das vigas de apoio. No entanto, a pesquisa bibliográfica também será utilizada, visto que houve a necessidade de se embasar teoricamente o trabalho, para que se tivesse o conhecimento a respeito das lajes, bem como dos seus processos de dimensionamento, essenciais para o entendimento das análises aqui realizadas.

Dados a serem obtidos

Busca-se obter os esforços (momentos fletores) de um painel de lajes, previamente definido, por meio do dimensionamento simplificado de lajes maciças de concreto armado, e do processo de Analogia de Grelha, verificando o quanto a consideração da flexibilidade das vigas que dão apoio as lajes influencia na distribuição das solicitações nestes elementos.

Forma de obtenção dos dados

Inicialmente foi definido o pavimento-tipo a ser estudado. Em seguida, se procedeu-se com o dimensionamento do painel de lajes, tanto pelo método simplificado, quanto pelo processo de Analogia de Grelha.

O dimensionamento simplificado do painel de lajes, se deu através da utilização das tabelas de Bares (1972), adaptada por Pinheiro (2007), seguindo o roteiro de cálculo explanado a seguir.

1. Inicialmente calculou-se o parâmetro λ , através da Eq. 3, o qual permite definir se a laje é armada em uma ($\lambda \geq 2$), ou nas duas direções ($\lambda \leq 2$).
2. Em seguida, conhecidos os carregamentos atuantes, buscou-se determinar os coeficientes μ , fornecidos pelas tabelas de Bares (1972), obtendo-se as solicitações (momentos fletores), por meio das Eq. 4, 5, 6 e 7.
3. Por fim, para os momentos negativos, nas continuidades entre lajes adjacentes, realiza-se a compatibilização de acordo as condições expressas pela Equação 8.
4. Para o dimensionamento por meio da Analogia de Grelha, o pavimento tipo foi submetido a uma modelagem computacional por meio do *software* Eberick V10, da empresa AltoQi, o qual conta com esse processo de dimensionamento em sua rotina de cálculo.

Estudo de caso abordado

O estudo de caso abordado consiste em um painel de lajes constituídos por cinco lajes retangulares, sendo uma delas, uma laje em balanço. A Figura 5 ilustra a planta de formas do pavimento dimensionado e analisado.

As cargas consideradas para efeito de dimensionamento estão dispostas na Tabela 1.

Tabela 1 – Carregamentos atuantes no painel de lajes

CARGAS PERMANENTES (g)	Valor (kN/m ²)
Peso Próprio	2,5
Revestimento	1
Total de cargas permanentes (g)	3,5
CARGAS VARIÁVEIS (q)	Valor (kN/m ²)
Sobrecarga	1,5
Total de cargas variáveis(q)	1,5
Carregamento total (g+q)	5

Apresentação e análise dos resultados

Os resultados obtidos nesta pesquisa, foram confrontados entre si, realizando-se as análises necessárias, para que se pudesse retirar as conclusões acerca da influência da flexibilidade das vigas de apoio para o comportamento estrutural das lajes maciças de concreto armado. Os valores das solicitações (momentos fletores), nos elementos dimensionados por ambos os métodos, serão explanados em tabelas comparativas,

de modo a facilitar uma melhor compreensão dos resultados aqui alcançados.

Cálculo dos momentos fletores máximos

As condições de bordo para as lajes em análise são apresentadas nas figuras a seguir:

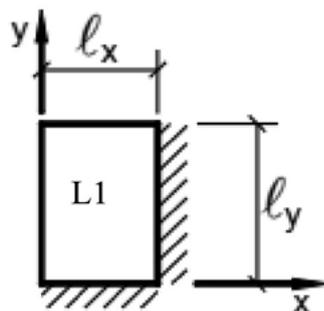


Figura 6 – Condições de bordo da laje L1 (Pinheiro, 2007).

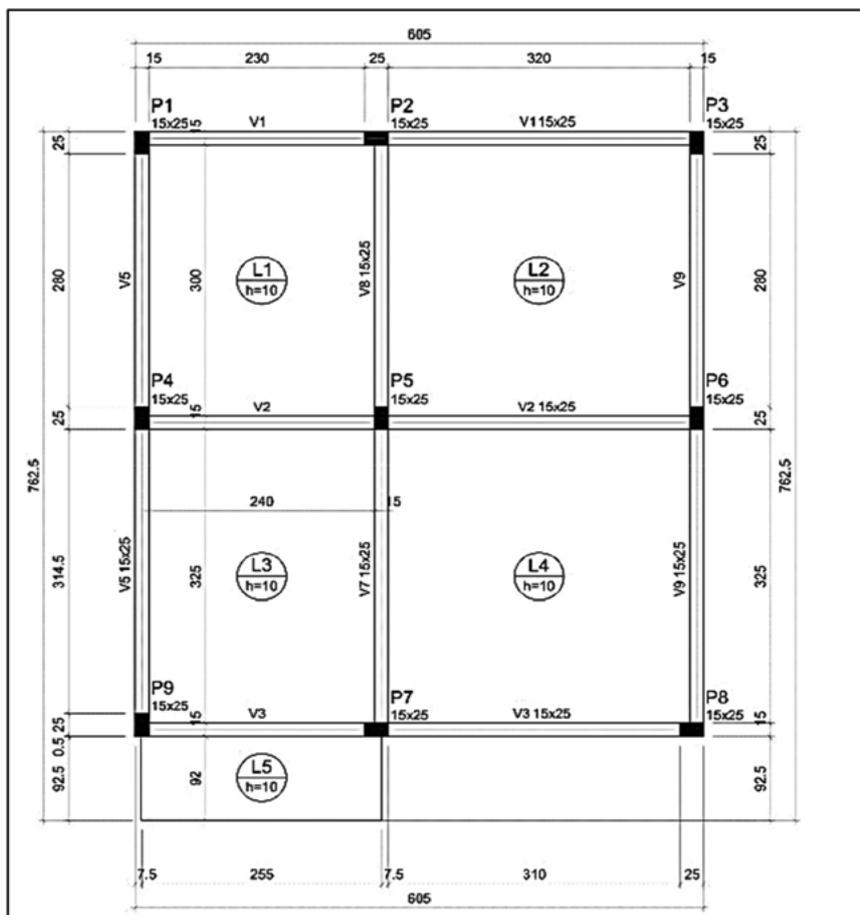


Figura 5 – Planta de formas do pavimento tipo em estudo.

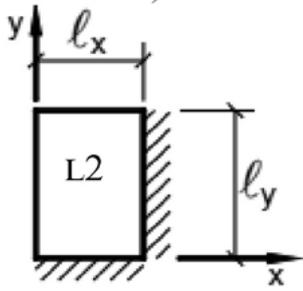


Figura 7 – Condições de bordo da laje L2 (Pinheiro, 2007).

$$M_y^+ = \mu_y \cdot \frac{pl_y^2}{100} = 2,56 \cdot \frac{5,2,55^2}{100} = 0,8323 \text{ kN.m/m.}$$

$$M_x^- = \mu'_x \cdot \frac{pl_x^2}{100} = 9,03 \cdot \frac{5,2,55^2}{100} = -2,9359 \text{ kN.m/m}$$

$$M_y^- = \mu'_y \cdot \frac{pl_y^2}{100} = 7,72 \cdot \frac{5,2,55^2}{100} = -2,5100 \text{ kN.m/m}$$

Para a laje L2 fazendo-se uso das equações 3, 4, 5, 6 e 7, juntamente com os coeficientes obtidos com as Tabelas de Bares, foram obtidos os valores de momentos nas duas direções da laje, já que $\lambda = 335/315 = 1,06 < 2$, o que configura uma laje armada nas duas direções. Desta forma

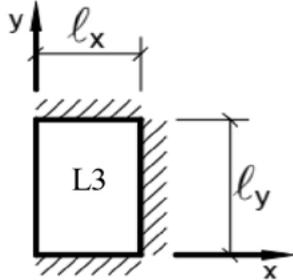


Figura 8 – Condições de bordo da laje L3 (Pinheiro, 2007).

$$M_x^+ = \mu_y \cdot \frac{pl_x^2}{100} = 2,67 \cdot \frac{5,3,15^2}{100} = 1,3246 \text{ kN.m/m.}$$

$$M_y^+ = \mu_x \cdot \frac{pl_y^2}{100} = 3,19 \cdot \frac{5,3,15^2}{100} = 1,5826 \text{ kN.m/m.}$$

$$M_x^- = \mu'_y \cdot \frac{pl_x^2}{100} = 7,36 \cdot \frac{5,3,15^2}{100} = -3,6515 \text{ kN.m/m}$$

$$M_y^- = \mu'_x \cdot \frac{pl_y^2}{100} = 7,87 \cdot \frac{5,3,15^2}{100} = -3,9045 \text{ kN.m/m}$$

Para a laje L3 utilizando-se as equações 3,4,5,6 e 7, em conjunto com os coeficientes obtidos com as Tabelas de Bares foram determinados os valores de momentos nas duas direções da laje, já que $\lambda = 340/255 = 1,33 < 2$, o que configura a laje armada nas duas direções. Assim

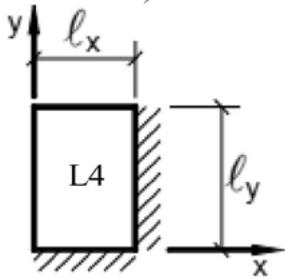


Figura 9 – Condições de bordo da laje L4 (Pinheiro, 2007).

$$M_x^+ = \mu_x \cdot \frac{pl_x^2}{100} = 2,94 \cdot \frac{5,3,35^2}{100} = 1,6497 \text{ kN.m/m.}$$

$$M_y^+ = \mu_y \cdot \frac{pl_y^2}{100} = 2,68 \cdot \frac{5,3,35^2}{100} = 1,5038 \text{ kN.m/m.}$$

$$M_x^- = \mu'_x \cdot \frac{pl_x^2}{100} = 7,43 \cdot \frac{5,3,35^2}{100} = -4,1692 \text{ kN.m/m}$$

$$M_y^- = \mu'_y \cdot \frac{pl_y^2}{100} = 7,18 \cdot \frac{5,3,35^2}{100} = -4,0289 \text{ kN.m/m}$$

Para a laje L4 fazendo-se uso das equações 3, 4, 5, 6 e 7, juntamente com os coeficientes obtidos com as Tabelas de Bares, foram obtidos os valores de momentos nas duas direções da laje, já que $\lambda = 340/335 = 1,02 < 2$, o que configura uma laje armada nas duas direções. Desta forma

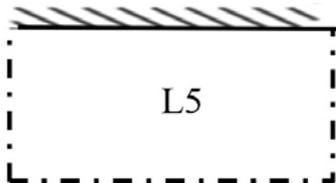


Figura 10 – Condições de bordo da laje L5.

Para a laje L1, utilizando-se as equações 3,4,5,6 e 7, em conjunto com os coeficientes obtidos com as Tabelas de Bares foram determinados os valores de momentos nas duas direções da laje, já que $\lambda = 315/255 = 1,24 < 2$, o que configura a laje armada nas duas direções. Assim

$$M_x^+ = \mu_x \cdot \frac{pl_x^2}{100} = 3,86 \cdot \frac{5,2,55^2}{100} = 1,2550 \text{ kN.m/m.}$$

$$M_x^+ = \mu_x \cdot \frac{pl_x^2}{100} = 2,94 \cdot \frac{5,3,35^2}{100} = 1,6497 \text{ kN.m/m.}$$

$$M_y^+ = \mu_y \cdot \frac{pl_y^2}{100} = 2,68 \cdot \frac{5,3,35^2}{100} = 1,5038 \text{ kN.m/m.}$$

$$M_x^- = \mu'_x \cdot \frac{pl_x^2}{100} = 7,43 \cdot \frac{5,3,35^2}{100} = -4,1692 \text{ kN.m/m}$$

$$M_y^- = \mu'_y \cdot \frac{pl_y^2}{100} = 7,18 \cdot \frac{5,3,35^2}{100} = -4,0289 \text{ kN.m/m}$$

A Laje 5 teve seu momento calculado em apenas uma direção, já que $\lambda = 255/99,5 = 2,56 > 2$, o que configura uma laje armada em uma direção. Desta

forma, seu momento, neste caso, negativo no engaste, foi obtido aplicando as formulações básicas de Teoria das Estruturas:

$$M_y^- = \frac{p \cdot x \cdot l^2}{2} = \frac{5 \cdot 0,955^2}{2} = 2,2800 \text{ kN.m/m}$$

Conforme apresentado, os momentos negativos existentes nas continuidades entre as lajes devem ser compatibilizados, fazendo uso do critério conforme a Equação 8. A seguir serão expostos os valores de momentos negativos compatibilizados em cada continuidade do painel de lajes em estudo.

→ L1-L2

A continuidade entre as lajes L1 e L2, se encontra na direção x. Portanto, serão compatibilizados os momentos negativos nesta direção.

$$M_{L1-L2}^- \geq \left\{ \begin{array}{l} 0,8 \cdot M_{maior}^- \\ \frac{M_{maior}^- + M_{menor}^-}{2} \end{array} \right. = \left\{ \begin{array}{l} 0,8 \cdot 3,6515 = 2,9212 \\ \frac{2,9359 + 3,6515}{2} = 3,2937 \end{array} \right.$$

Adota-se então $M_{L1-L2}^- = 3,2937 \text{ kN.m/m}$.

→ L1-L3

A continuidade entre as lajes L1 e L3, se encontra na direção y. Portanto, serão compatibilizados os momentos negativos nesta direção.

$$M_{L1-L3}^- \geq \left\{ \begin{array}{l} 0,8 \cdot M_{maior}^- \\ \frac{M_{maior}^- + M_{menor}^-}{2} \end{array} \right. = \left\{ \begin{array}{l} 0,8 \cdot 2,5100 = 2,0080 \\ \frac{2,4807 + 2,5100}{2} = 2,4956 \end{array} \right.$$

Adota-se então $M_{L1-L3}^- = 2,4956 \text{ kN.m/m}$.

→ L2-L4

A continuidade entre as lajes L2 e L4, se encontra na direção y. Portanto, serão compatibilizados os momentos negativos nesta direção.

$$M_{L2-L4}^- \geq \left\{ \begin{array}{l} 0,8 \cdot M_{maior}^- \\ \frac{M_{maior}^- + M_{menor}^-}{2} \end{array} \right. = \left\{ \begin{array}{l} 0,8 \cdot 4,0289 = 3,2231 \\ \frac{4,0289 + 3,9045}{2} = 3,9667 \end{array} \right.$$

Adota-se então $M_{L2-L4}^- = 3,9667 \text{ kN.m/m}$.

→ L3-L4

A continuidade entre as lajes L3 e L4, se encontra na direção x. Portanto, serão compatibilizados os momentos negativos nesta direção.

$$M_{L4-L3}^- \geq \left\{ \begin{array}{l} 0,8 \cdot M_{maior}^- \\ \frac{M_{maior}^- + M_{menor}^-}{2} \end{array} \right. = \left\{ \begin{array}{l} 0,8 \cdot 4,1692 = 3,3354 \\ \frac{4,1692 + 2,8416}{2} = 3,5054 \end{array} \right.$$

Adota-se então $M_{L1-L2}^- = 3,5054 \text{ kN.m/m}$.

→ L5-L3

A continuidade entre as lajes L5 e L3, se encontra na direção y. Portanto, serão compatibilizados os momentos negativos nesta direção.

$$M_{L5-L3}^- \geq \left\{ \begin{array}{l} 0,8 \cdot M_{maior}^- \\ \frac{M_{maior}^- + M_{menor}^-}{2} \end{array} \right. = \left\{ \begin{array}{l} 0,8 \cdot 2,4807 = 1,9846 \\ \frac{2,4807 + 2,2800}{2} = 2,3804 \end{array} \right.$$

Adota-se então = 2,3804 kN.m/m.

Analogia de grelha

O pavimento utilizado como objeto de estudo deste trabalho foi lançado no *software* Eberick V10 Basic, que realiza o dimensionamento das lajes maciças fazendo uso do processo de Analogia de Grelha. A Figura 11 ilustra uma visão 3D do pórtico gerado pelo *software*.



Figura 11 – Pórtico 3D gerado pelo Eberick V10 Basic.

Definiu-se as lajes com 10 cm de espessura, carga acidental de 1,5 kN/m² e carga de revestimento de 1 kN/m², considerando-se todas as lajes engastadas umas nas outras. As vigas, tiveram seção adotada de 15 cm x 25 cm, para que pudessem ter um certo grau de deformação, favorecendo a análise da influência da flexibilidade dos apoios na distribuição das solicitações nas lajes. E para os pilares, adotou-se uma seção 20 cm x 25 cm. Vale ressaltar que a influência das dimensões dos pilares não faz parte da análise aqui realizada.

Realizou-se então a modelagem da estrutura no *software*, que foi processada e calculada, gerando um modelo de grelha, o qual demonstra uma configuração

deformada do painel de lajes lançado, com a distribuição dos momentos fletores ao longo da malha, ilustrado na Figura 12. O espaçamento da malha utilizado, foi de 50 cm x 50 cm, definido pela configuração padrão do Eberick V10 Basic.

A Figura 13 traz o resumo dos resultados de momentos fletores gerados pelo *software* AltoQI Eberick v10, após a modelagem, dimensionamento e análise do painel de lajes em estudo por Analogia de Grelha. Todos os valores encontram-se em kgf.m/m, unidade padrão do *default* do *software*.

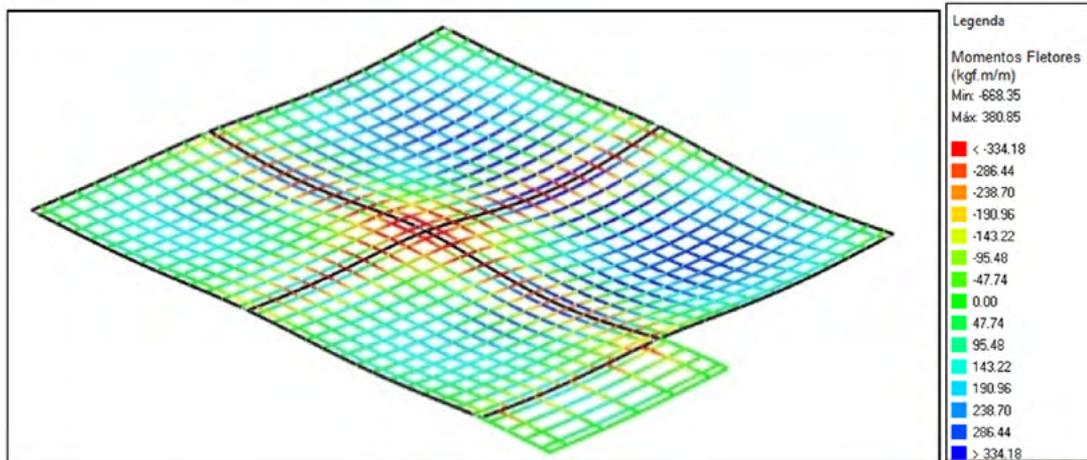


Figura 12 – Grelha do pavimento (50 cm x 50 cm).

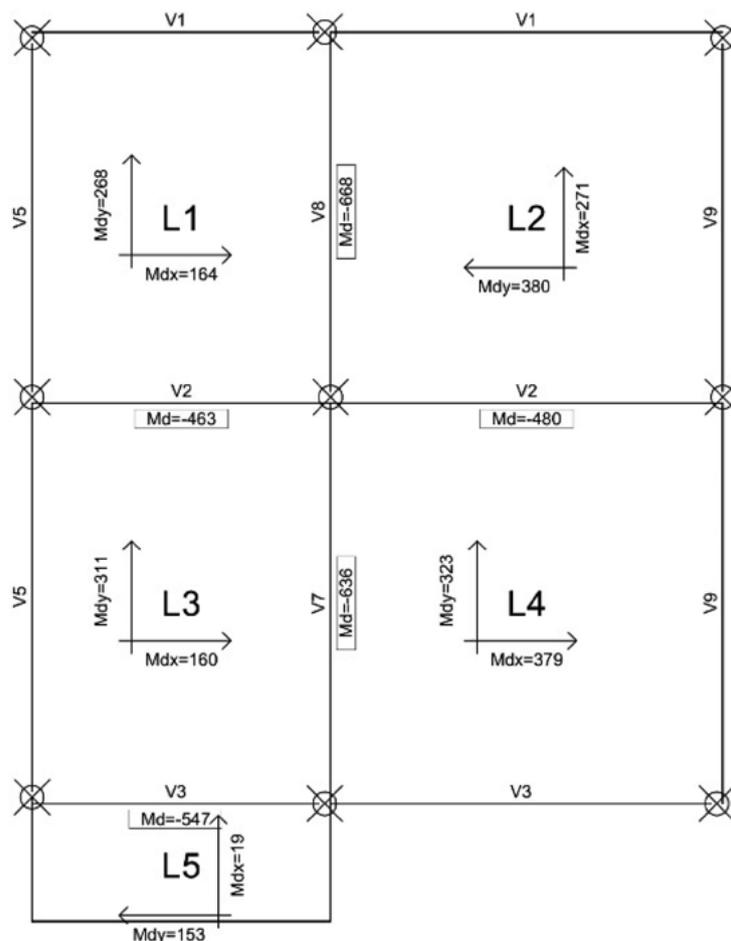


Figura 13 – Resumo de momentos obtidos pelo processo de Analogia de Grelha.

Comparação dos resultados

A Tabela 2 mostra um resumo dos resultados de momentos fletores positivos, em kN.m/m, obtidos por ambos os métodos de dimensionamento utilizados no cálculo do painel de lajes em estudo.

A análise dos resultados expostos nessa tabela permite observar que a diferença entre os resultados de momentos fletores positivos obtidos pelo dimensionamento por meio das Tabelas de Bares e pelo processo de Analogia de Grelha chegou a atingir 73,14%.

Desta forma, os resultados revelam que, a deformabilidade dos apoios (vigas), levada em conta no dimensionamento por Analogia de Grelha, causou um aumento um tanto considerável nos momentos fletores positivos em todas as lajes do pavimento calculado, tanto na direção x, quanto na direção y. Isto, em razão do aumento no deslocamento dos apoios das lajes, o que ocasionou um aumento nos valores de momentos positivos nas lajes. Em especial, no caso da laje 5, em razão de sua condição de apoio, em balanço, pelo método simplificado desconsidera-se a ocorrência de momentos positivos na laje, diferentemente do que ocorre no Processo de Analogia de Grelha, o qual realiza um dimensionamento mais refinado do elemento, resultando em momentos positivos na laje, antes inexistentes para o método simplificado, gerando em função disso, uma variação percentual de 100% entre os valores encontrados.

Na Tabela 3 tem-se o resumo dos valores de momentos fletores negativos das vinculações entre as lajes, obtidos por ambos os métodos de dimensionamento já mencionados anteriormente.

A partir da observação dos resultados explanados na Tabela 3, percebe-se que, no que se refere aos momentos negativos, a variação máxima entre os valores obtidos por meio das Tabelas de Bares e pelo processo de Analogia de Grelha é de 56,48%. É possível notar também que o fato de no dimensionamento por Analogia de Grelha haver a consideração da deformação dos apoios das lajes, ocorre o surgimento de solicitações negativas nas bordas das lajes (Figura 13), fato que não se repete no dimensionamento analítico, ocasionando assim, um aumento dos momentos negativos nas vinculações entre lajes adjacentes.

CONCLUSÕES

Assim, por meio deste estudo, podemos alegar que o comportamento estrutural apresentado, no que se refere a distribuição de esforços nas lajes, são diferentes para cada método de dimensionamento, sendo a deformabilidade dos apoios das lajes um dos fatores influenciadores neste comportamento. Os resultados aqui alcançados demonstraram que, para o painel de lajes estudado, os momentos fletores, positivos e negativos, obtidos por meio da utilização da Tabela de Bares resultaram em valores menores quan-

Tabela 2 – Comparação de momentos fletores positivos

	Tabelas de Bares		Analogia de Grelha Eberick V10		Diferença Percentual	
	Mx+	My+	Mx+	My+	Mx+	My+
L1	1,255	0,8323	1,6400	2,6800	23,48%	68,94%
L2	1,3246	1,5826	3,8000	2,7100	65,14%	41,60%
L3	1,19	0,8355	1,6000	3,1100	25,63%	73,14%
L4	1,6497	1,5038	3,7900	3,2300	56,47%	53,44%
L5	0	0	1,5300	0,1900	100,00%	100,00%

Tabela 3 – Comparação momentos fletores negativos

	Tabelas de Bares	Analogia de Grelha Eberick V10	Diferença Percentual
	M-	M-	M-
L1-L2	3,2937	6,6800	50,69%
L1-L3	2,4956	4,6300	46,10%
L2-L4	3,9667	4,8000	17,36%
L3-L4	3,5054	6,3600	44,88%
L3-L5	2,3804	5,4700	56,48%

do comparados aos valores obtidos por meio do Processo de Analogia de Grelha, o qual leva em conta a deformabilidade das vigas de apoio das lajes, bem como sua plastificação, o que acaba resultando em valores de solicitações mais refinados no dimensionamento destes elementos estruturais. Porém, é importante frisar, que os resultados gerados pelas tabelas de dimensionamento, no que se refere as lajes, já são consolidados no ramo da Engenharia de Estruturas, e que, portanto, não podem ser desprezados, pois ainda servem como parâmetro de comparação para diversas modelagens computacionais realizadas, as quais tem a finalidade de refinar cada vez mais o dimensionamento e a análise do comportamento destes elementos estruturais.

Referências

- ARAÚJO, J. M. de. Curso de concreto armado. 2ª ed. v. 1. Rio Grande: Dunas, 2003.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR 6120: cargas para o cálculo de projetos de edificações. Rio de Janeiro, 1980.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR 8681: ações e segurança nas estruturas – Procedimento. Rio de Janeiro, 2003.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR 6118: Projeto de estruturas de concreto – Procedimento. Rio de Janeiro, 2014.
- BANKI, A. L. Modelos de análise de lajes de concreto armado. 2013. Disponível em: <<http://faq.altoqi.com.br/content/245/588/pt-br/modelos-de-análise-de-lajes-de-concreto-armado.html>>. Acesso em: 26 mar. 2018.
- BARES, R. Tablas para el cálculo de placas y vigas parede. Barcelona: Editora Gustavo Gili S/A, 1972.
- BASTOS, P. S. dos S. Lajes de Concreto. Bauru: Universidade Estadual Paulista, 2008. Notas de Aula.
- CARVALHO, R. C. Análise não linear de pavimentos de edificios de concreto através da analogia de grelha. Tese (doutorado) – Universidade de São Paulo, Escola de Engenharia de São Carlos, SP, São Carlos, 1994.
- CARVALHO, R. C.; FIGUEIREDO FILHO, J. R. Cálculo e detalhamento de estruturas usuais de concreto armado – segundo a NBR 6118:2003. 2ª Ed. São Carlos: UFSCar, 2004.
- COELHO, J. A. Modelagem de lajes de concreto armado por analogia de grelha. Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Santa Catarina, UFSC, Florianópolis, 2000.
- COELHO, J. D. Modelagem de lajes de concreto armado por analogia de grelha: influência da flexibilidade dos apoios. 2013. Disponível em: <http://faq.altoqi.com.br/content/245/605/pt-br/modelagem-de-lajes-de-concreto-armado-por-analogia-de-grelha-_influencia-da-flexibilidade-dos-apoios.html>. Acesso em: 26 mar. 2018.
- CUNHA, A. J. P.; SOUZA, V. C. M. Lajes em Concreto Armado e Protendido. Rio de Janeiro. Ed. UERJ, 1998.
- DEBELLA, L. B. C. Estudo da analogia de grelha no cálculo de lajes maciças de concreto armado. 2015. 80 f. TCC (Graduação) – Curso de Engenharia Civil, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Pato Branco, 2015.
- GIL, A. C. Como elaborar projetos de pesquisa. São Paulo: ATLAS, 2002.
- GONTIJO, G. B. Cálculo e análise dos momentos fletores em lajes de concreto armado. 2015. 47 p. TCC (curso de especialização em estruturas) – Universidade Federal de Minas Gerais, 2015.
- KIRST, R. W. Elementos superficiais laminares em concreto armado: Estudo comparativo entre métodos de cálculo. 2010. 79 f. TCC (Graduação) – Curso de Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2010.
- PINHEIRO, L. M. Fundamentos do concreto e projeto de edificios. São Carlos: Universidade de São Paulo, 2007.
- PRODANOV, C. C.; FREITAS, E. C. de. Metodologia do trabalho científico: métodos e técnicas da pesquisa e do trabalho acadêmico. Novo Hamburgo: Feevale, 2013.
- REIS, E. M. dos. Análise de pavimentos de edificios utilizando a Analogia de grelha. Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2007.
- RODRIGUES, P. C. Notas de Aula da disciplina de Estruturas de Concreto Armado I. Curso de graduação em Engenharia Civil. 2ª Ed. Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul. Ijuí, 2011.
- SIMONIAN, D. Análise estrutural de lajes de concreto armado em edificios. 2009. 51 f. TCC (Graduação) – Curso de Engenharia Civil, Universidade Presbiteriana Mackenzie, São Paulo, 2009.
- TIMOSHENKO, S. P.; WOINOWSKY-KRIEGER, S. Theory of plates and shells, Mc Graw- Hill Kogakusha, Ltda, 1959.
- ZENZEN, A. Comparação de métodos de cálculo para determinação dos momentos fletores em lajes de concreto armado. Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul, Ijuí, 2012.