

# Análise de Pilares sob Efeito de Não-Linearidade Física e Geométrica pelo Método dos Elementos Finitos

*Ivan E. S. Regados<sup>1</sup>  
Rui N. Oyamada<sup>2</sup>  
Carlos E. N. Mazzilli<sup>3</sup>*

## Resumo

Este trabalho procura apresentar uma metodologia para obtenção de esforços solicitantes em pilares de concreto armado levando em consideração efeitos de não-linearidades físicas e geométricas. Para consideração da não linearidade geométrica a metodologia aqui proposta consiste na formulação de um elemento finito de barra plano contemplando não linearidades, tanto no campo de deformações, quanto no campo de deslocamentos. Para consideração da não linearidade física foi adotado o comportamento não resistente à tração do concreto proposto pela NBR6118:2014, de forma a contemplar respostas não lineares do material quando submetido a compressão. Para o aço foi adotado o comportamento proposto pela NBR6118:2014, levando em consideração eventual plastificação do material, caso ocorra. No estudo de caso, é discutido o caso de um pilar cuja localização fez com que sua esbeltez fosse obrigatoriamente maior do que usualmente utilizada para obras de pontes. Com a finalidade de melhor verificar sua sensibilidade a efeitos das não-linearidades é feita a análise estrutural com a formulação aqui construída e os resultados são comparados com metodologias clássicas de análise, como a do Pilar Padrão proposto pela NBR6118:2014.

**Palavras-chave:** método dos elementos finitos; não-linearidade física; não-linearidade geométrica; pilar; concreto armado.

## Introdução

A obtenção da configuração deformada de elementos lineares de concreto submetidos a carregamentos quaisquer vem sendo objeto de estudo ao longo dos últimos séculos. Soluções analíticas foram obtidas para situações particulares, de maneira geral desprezando efeitos da não-linearidade física e geométrica, porém, sempre para configurações estruturais simplistas, que nem sempre conseguem representar fielmente situações reais de projeto.

O concreto, face sua capacidade de se moldar às mais diversas formas e seu baixo custo, apresenta-se como material predominantemente utilizado na engenharia civil nacional, sendo utilizado nos mais diversos tipos de estruturas e mostrando-se capaz de atender a elevadas solicitações.

Dado que no passado a resistência do concreto não era tão elevada, compensava-se a baixa resistência do concreto com estruturas mais robustas, o que por sua vez diminuía o efeito de não-linearidades

geométricas que pudessem impactá-las. Frente à evolução tecnológica em torno do material, o concreto vem atingindo resistências cada vez mais elevadas, viabilizando estruturas mais esbeltas. Neste cenário as não-linearidades geométricas começam a ficar mais relevantes, fazendo com que o projetista tenha que despender significativa atenção a esse fato.

Muito embora o concreto armado seja o material mais utilizado na engenharia civil em âmbito nacional, representar de forma fiel seu comportamento não é uma tarefa simples. Dentre os pontos que merecem destaque podemos citar: resposta não linear em termos de tensão x deformação; o concreto é um material com baixa resistência à tração; a armadura de aço é, de maneira geral, o material utilizado para resistir aos esforços de tração que venham a surgir na seção, fazendo com que a seção se comporte como um compósito de dois materiais diferentes; o aço para solicitações elevadas apresenta perda de capacidade resistente e plastificação do material.

Frente às não-linearidades física e geométrica e

<sup>1</sup> Escola Politécnica da Universidade de São Paulo – OUPEC Engenharia / ivan.regados@usp.br

<sup>2</sup> Escola Politécnica da Universidade de São Paulo – OUPEC Engenharia / rui.oyamada@outec.com.br

<sup>3</sup> Escola Politécnica da Universidade de São Paulo / cenmazzi@usp.br

na busca de viabilizar o projeto de estruturas esbeltas, a NBR 6118:2014 apresenta diferentes métodos, construídos de forma a garantir segurança, que buscam, de maneira simplista, prover o projetista de resultados seguros e confiáveis, quando necessário dimensionar estruturas que se apresentem sensíveis às não linearidades.

O equacionamento aqui construído utilizará o Método dos Elementos Finitos (MEF) na solução da equação diferencial obtida. O método é uma importante ferramenta utilizada pela engenharia na solução de problemas, viabilizando a obtenção da resposta de sistemas estruturais complexos e possibilitando a construção de modelos mais completos, capazes de contemplar fenômenos de difícil representação por meio de formulação analítica. Buscaremos representar os efeitos das não-linearidades física e geométrica em, a fim de resolver problemas no âmbito de projetos estruturais, como é o caso de pilares esbeltos, de forma mais precisa, com segurança.

## Revisão Bibliográfica

Na construção da formulação algumas hipóteses precisam ser assumidas a fim de justificar premissas necessárias à definição do campo de deslocamentos da barra. Adotaremos as mesmas hipóteses da barra de Bernoulli-Euler, ou seja, que a seção plana permanece plana e ortogonal ao eixo da barra. Na Figura 1 apresentamos o campo de deslocamentos de forma esquemática.

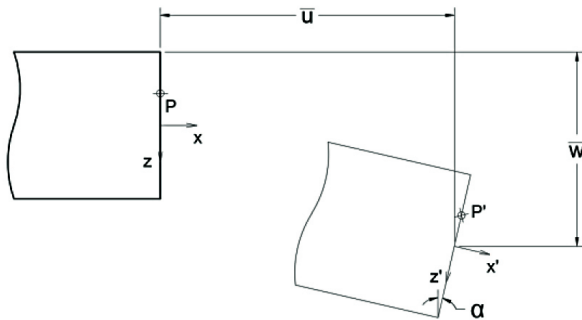


Figura 1 – Campo de deslocamentos

A formulação aqui construída contempla não-linearidade no campo de deslocamentos longitudinais conforme se indica na equação (1). Essa não-linearidade esta apresentada com maior riqueza de detalhes em [7].

$$u = \bar{u} + \frac{x}{\ell} \int_0^{\ell} \bar{w}'^2 dx - \int_0^x \bar{w}'^2 dx - z\bar{w}' \quad (1)$$

Também optamos por considerar não-linearidade no alongamento de Green, conforme apresentado na equação (2).

$$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \quad (2)$$

A formulação do equilíbrio dinâmico do elemento finito foi feita utilizando os preceitos preconizados pela Equação de Lagrange. Note que este trabalho não pretende abordar efeitos da dinâmica, de forma que os termos que levem em consideração a energia cinética são desprezados. A equação resultante dessas hipóteses segue apresentada em (3).

$$\frac{\partial U}{\partial q_i} = N_i \quad (3)$$

onde  $U$  é a energia potencial,  $q_i$  são as coordenadas generalizadas que descrevem o sistema e  $N_i$  são as forças generalizadas associadas às coordenadas generalizadas.

Posto que o procedimento a ser adotado na solução do problema utilizará o MEF, será necessário apresentar o elemento finito utilizado. O elemento de barra aqui construído é plano e constituído por dois nós e possui 6 graus de liberdade, 3 atrelados a cada nó. Ele é apresentado na Figura 2 e tem graus de liberdade associados ao deslocamento longitudinal, transversal e rotação dos nós.



Figura 2 – Elemento de barra

Para que o equacionamento seja feito, será necessário conhecer a energia potencial ao longo de todo o elemento, para tanto, devemos estabelecer a deformação ao longo do domínio de integração, em função dos graus de liberdade. Para este propósito utilizaremos as funções de forma, genericamente designadas por  $h_i$ , aqui escolhidas como na solução exata da barra de Bernoulli-Euler na estática linear, apresentadas com detalhes em [5].

O campo de deslocamentos pode ser escrito em função de quatro parcelas distintas, duas parcelas lineares e duas parcelas não lineares, apresentadas separadamente em (4)

$$\begin{aligned} u &= u_l + u_{nl} \\ u_l &= \bar{u} - z\bar{w}' \\ u_{nl} &= \frac{x}{\ell} \int_0^\ell \bar{w}'^2 dx - \int_0^x \bar{w}'^2 dx \end{aligned} \quad (4)$$

A parcela linear  $u_l$  pode ser aproximada utilizando as funções de forma e escrita em notação matricial como apresentado em (5)

$$\begin{aligned} \bar{u} &= \mathbf{A}_1^T \mathbf{U} = [h_1 \quad 0 \quad 0 \quad h_4 \quad 0 \quad 0] \mathbf{U} \\ z\bar{w}' &= z\mathbf{A}_2^T \mathbf{U} = z[0 \quad h'_2 \quad h'_3 \quad 0 \quad h'_5 \quad h'_6] \mathbf{U} \\ u_l &= (\mathbf{A}_1^T - z\mathbf{A}_2^T) \mathbf{U} \end{aligned} \quad (5)$$

onde  $U$  é o vetor de deslocamentos nodais.

A parcela não-linear  $U_{nl}$ , também aproximada utilizando as funções de forma e escrita em notação matricial, segue apresentada em (6).

$$\begin{aligned} \frac{x}{\ell} \int_0^\ell \bar{w}'^2 dx &= \frac{x}{\ell} \int_0^\ell \mathbf{U}^T \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_2^T \mathbf{U} dx = \\ &= \mathbf{U}^T \left( \frac{x}{\ell} \int_0^\ell \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_2^T dx \right) \mathbf{U} = \mathbf{U}^T \boldsymbol{\beta}_\ell \mathbf{U} \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \int_0^x \bar{w}'^2 dx &= \int_0^x \mathbf{U}^T \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_2^T \mathbf{U} dx = \\ &= \mathbf{U}^T \left( \int_0^x \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_2^T dx \right) \mathbf{U} = \mathbf{U}^T \boldsymbol{\beta}_x \mathbf{U} \end{aligned} \quad (6)$$

$$u_{nl} = (\mathbf{U}^T \boldsymbol{\beta}_\ell - \mathbf{U}^T \boldsymbol{\beta}_x) \mathbf{U}$$

As matrizes  $\boldsymbol{\beta}_\ell$  e  $\boldsymbol{\beta}_x$  são apresentadas termo a termo em anexo.

Utilizando as equações (4), (5) e (6) obtemos o campo de deslocamentos longitudinais  $u$  apresentado em notação matricial em (7):

$$u = (\mathbf{A}_1^T - z\mathbf{A}_2^T + \mathbf{U}^T \boldsymbol{\beta}_\ell - \mathbf{U}^T \boldsymbol{\beta}_x) \mathbf{U} \quad (7)$$

Também podemos escrever matricialmente o campo de deslocamentos transversais  $w$ , que segue apresentado em (8):

$$w = \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{U} \quad (8)$$

onde  $w_i$  é apresentado em (9)

$$\boldsymbol{\omega}^T = [0 \quad h_2 \quad h_3 \quad 0 \quad h_5 \quad h_6] \quad (9)$$

O campo de deformações  $\varepsilon$  é obtido utilizando as equações (2), (7) e (8).

A energia de deformação do sistema é dada pela expressão (10).

$$U = \frac{1}{2} \int_V \varepsilon \sigma d \quad (10)$$

Muito embora este trabalho contemple efeitos da não-linearidade física, a metodologia utilizada para levar em consideração essa não-linearidade, detalhada a seguir, faz com que seja necessário que parte do processamento seja feito considerando o material como elástico linear, com posterior correção desta hipótese, de forma que, nesta etapa, assume-se uma relação linear entre tensão e deformação específica (Lei de Hooke), descrita em (11):

$$\sigma = E\varepsilon \quad (11)$$

A formulação do elemento é construída a partir de utilizarmos o campo de deformações apresentado em (2) para obter a energia de deformação mostrada em (10). Em posse da energia de deformação o equilíbrio pode ser estabelecido pela equação (3), como fruto dessa premissa é obtida a Matriz de Rigidez do elemento, mostrada em anexo termo a termo.

A partir da equação (3) é obtido um sistema não linear de equações, que pode ser resolvido por meio de métodos numéricos. Optamos por utilizar o Método de Newton-Raphson, método fortemente dependente da hipótese inicial para obtenção da resposta. Note que, de maneira geral, em situações de projeto, a deformada de equilíbrio não linear geométrica tende a estar próxima da deformada de equilíbrio linear, uma vez que projetamos estruturas que não apresentem deformações excessivamente grandes. Dessa forma uma boa hipótese inicial para o método tende a ser a resposta linear da estrutura.

A não-linearidade física será levada em consideração mediante atualizações nas rigidezes obtidas a partir do equilíbrio estabelecido pela formulação não-linear geométrica apresentada.

A configuração deformada de equilíbrio na seção de concreto armado é função dos esforços solicitantes, de modo que a rigidez dessa seção, ou seja, a relação entre solicitação e deformação, é função da configuração deformada não linear geométrica de equilíbrio.

A perda de equilíbrio pode acontecer por efeitos da não-linearidade geométrica (instabilidade) ou por perda da capacidade resistente da seção de concreto

armado. A rigidez que a estrutura apresenta deve ser obtida repetidamente até que haja uma resposta em consonância entre a rigidez utilizada na obtenção da configuração deformada não linear geométrica e a rigidez resultante da análise não linear física em função dos esforços solicitantes.

A deformada de equilíbrio da seção de concreto armado deve ser obtida por meio da integração dos esforços internos na seção, a fim de estabelecer igualdade entre esforços solicitantes e resistentes.

Para obtenção das tensões no concreto adotaremos a relação tensão x deformação proposta pela NBR 6118:2014, apresentada em (12).

$$\sigma_c = 0,85 \times \frac{f_{ck}}{\gamma_c} \times \left[ 1 - \left( 1 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{c2}} \right)^n \right] \text{ para } \varepsilon \leq \varepsilon_{c2} \quad (12)$$

$$\sigma_c = 0,85 \times \frac{f_{ck}}{\gamma_c} \text{ para } \varepsilon > \varepsilon_{c2}$$

onde  $\varepsilon_{c2}$  é a deformação a partir da qual o concreto apresenta comportamento plástico.

As armaduras serão representadas como pontos materiais com área definida a partir do diâmetro das diferentes barras que constituem a seção de concreto.

A relação tensão x deformação do aço também será a apresentada na NBR 6118:2014, indicada em (13).

$$\sigma_s = E_s \varepsilon \text{ para } \varepsilon \leq \varepsilon_{yd} \quad (13)$$

$$\sigma_s = \frac{f_{yk}}{\gamma_s} \text{ para } \varepsilon > \varepsilon_{yd}$$

onde  $\varepsilon_{yd}$  é a deformação específica a partir da qual a armadura passa a apresentar comportamento plástico.

Uma vez que a planicidade da seção é mantida na configuração deformada, podemos escrever (14).

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \kappa y \quad (14)$$

onde  $\varepsilon_0$  é a deformação da fibra localizada no centro elástico, definido abaixo, da seção de concreto armado e  $\kappa$  é a curvatura da seção.

Os esforços resistentes na seção podem ser obtidos a partir da integração das tensões.

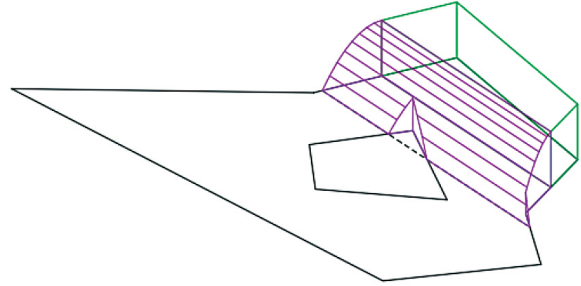
No caso das armaduras, os esforços resistentes são obtidos a partir de (15).

$$N_s = \sum_{i=1}^m \sigma_i A_{s,i} ; M_{s,y} = \quad (15)$$

$$= \sum_{i=1}^m x_i \sigma_i A_{s,i} ; M_{s,x} = \sum_{i=1}^m y_i \sigma_i A_{s,i}$$

No caso do concreto armado, as tensões apre-

sentam duas funções diferentes que estabelecem a resposta em função das deformações. Tais funções seguem destacadas na Figura 3.



**Figura 3** – Tensões desenvolvidas ao longo da região de concreto comprimida

Em roxo temos as tensões ao longo das fibras com deformação inferior a  $\varepsilon_{c2}$  e em verde as tensões em fibras com deformações superiores a  $\varepsilon_{c2}$ .

As forças resistentes podem ser obtidas a partir da integração das tensões, conforme mostrado em (16).

$$N_c = \int_{A_c} \sigma_c dA ; M_{c,y} = \quad (16)$$

$$N_c = \int_{A_c} \sigma_c dA ; M_{c,y} =$$

A solução das integrais no concreto pode ser obtida de diferentes maneiras. Uma vez que temos um contorno que define a seção de concreto, a integração deve ser feita exclusivamente no domínio que define a região comprimida. Optamos por utilizar o Teorema de Green para resolver as integrais, que passam a ser definidas a partir do contorno da região comprimida.

Os resultados das integrais são apresentados em anexo.

Novamente é formado um sistema de equações não lineares construído a partir da igualdade entre esforços resistentes e solicitantes. Utilizaremos o Método de Newton-Raphson na solução do sistema. A solução obtida define a configuração deformada da seção de concreto armado, função da deformada no centro elástico  $\varepsilon_0$  e da curvatura  $\kappa$ , na qual há igualdade entre esforços solicitantes e esforços resistentes.

É importante esclarecer o significado de centro elástico. Note que a seção de concreto armado pode ser entendida como um compósito cuja resposta é não linear em função de características de seus materiais constituintes já discutidas. O compósito será modelado como um material único, equivalente, cuja resposta será igual à da seção de concreto armado.

Para tanto a metodologia aqui utilizada consiste em reduzir os diferentes materiais que constituem a seção original a pontos localizados no centro de aplicação dos esforços presentes na seção original. O centro elástico equivalente do compósito pode ser obtido ao lançarmos mão de conceitos intermediários. Apenas a fim de melhor entender o processo, imaginemos que o objetivo seja converter os diferentes materiais da seção em uma nova seção de material único e elástico com módulo  $E_{eq}$  e propriedades dadas por  $A_{eq}$  e  $S_{eq} = A_{eq} Y_{eq}$ , dessa maneira as características da seção equivalente seriam definidas como apresentado em (17) e (18).

$$F_{eq} = \sum F_i \quad (17)$$

$$A_{eq} E_{eq} \varepsilon = \sum F_i$$

$$A_{eq} = \sum \frac{F_i}{E_{eq} \varepsilon_i}$$

$$M_{eq} = \sum M_i \quad (18)$$

$$A_{eq} Y_{eq} E_{eq} \varepsilon = \sum M_i$$

$$S_{eq} = \sum \frac{M_i}{E_{eq} \varepsilon_i}$$

Observe que  $Y_{eq}$  mostra a posição na qual, após integração das diferentes forças que atuam na seção equivalente, os esforços solicitantes seriam os mesmos da seção de concreto armado. Ao dividirmos as expressões (17) e (18) obtemos a expressão (19), que independe do valor arbitrado a  $E_{eq}$  ou das características da seção equivalente, mostrando porque a seção equivalente pode ser vista apenas como um conceito intermediário que visa a dar entendimento à definição do centro elástico.

$$Y_{eq} = \frac{\sum \frac{M_i}{\varepsilon_i}}{\sum \frac{F_i}{\varepsilon_i}} \quad (19)$$

Em posse da configuração deformada é possível obter os parâmetros que definem as rigidezes por meio das igualdades apresentadas em (20).

$$EA = \frac{N}{\varepsilon_0} \quad (20)$$

$$EI = \frac{M}{\kappa}$$

As rigidezes devem ser atualizadas nas definições das barras utilizadas na obtenção da resposta não linear geométrica até que a rigidez obtida no processo seja próxima o suficiente da rigidez utilizada no processamento.

## Resultados

A motivação para o desenvolvimento da ferramenta ora apresentada surgiu de um problema enfrentado em âmbito de projeto. Sabemos que, em determinadas situações, o projetista é obrigado a tomar decisões mesmo que o comportamento estrutural não possa ser plenamente entendido, seja por falta de conhecimento em relação a determinado fenômeno, por inexistência da ferramenta correta que deveria ser utilizada naquele caso ou qualquer outro motivo. Nesse tipo de situação devemos sempre prezar pela segurança e as decisões são tomadas visando primordialmente a esse parâmetro. No caso de pilares esbeltos de concreto armado, estruturas onde o comportamento é regido por diversos fenômenos complexos elucidados anteriormente, por vezes em projeto enfrentamos situações em que o real comportamento da estrutura não pode ser compreendido com o ferramental tipicamente utilizado. A ferramenta aqui desenvolvida busca fornecer uma alternativa suficientemente simples e rápida que auxilie o projetista a entender o comportamento desse tipo de estrutura quando necessário. Na situação real de projeto, apresentada abaixo, onde, por consequência do local disponível para locação do pilar, por um lado não poderíamos invadir o gabarito da linha de trem, por outro lado não poderíamos invadir a propriedade privada, ele apresentou solicitação elevada para sua geometria, gerando preocupação em relação a eventuais efeitos das não-linearidades.

Na Figura 4 é apresentado o pilar aqui estudado durante a etapa de construção:

A forma do pilar segue apresentada na Figura 5.

Do projeto sabemos que o pilar PA está submetido a um esforço de compressão de aproximadamente 1150 tf, já majorado para esforços de cálculo. No caso crítico, os esforços de primeira ordem apresentados em projeto são  $M_{d,transv} = 20$  tf.m e  $M_{d,long} = 70$  tf.m.

Para o pilar em situação típica de projeto, cuja análise seria feita pelo Método do Pilar Padrão (MPP), adotariamos uma condição de contorno que oferecesse segurança em relação à configuração real. No caso, podemos imaginar que o pilar se encontra biapoiado na transversal e engastado-livre na longitudinal, com altura útil de aproximadamente 13,5 m. Nessa situação, obteríamos os seguintes valores para a esbeltez do pilar:





Figura 4 – Pilar estudado durante a construção

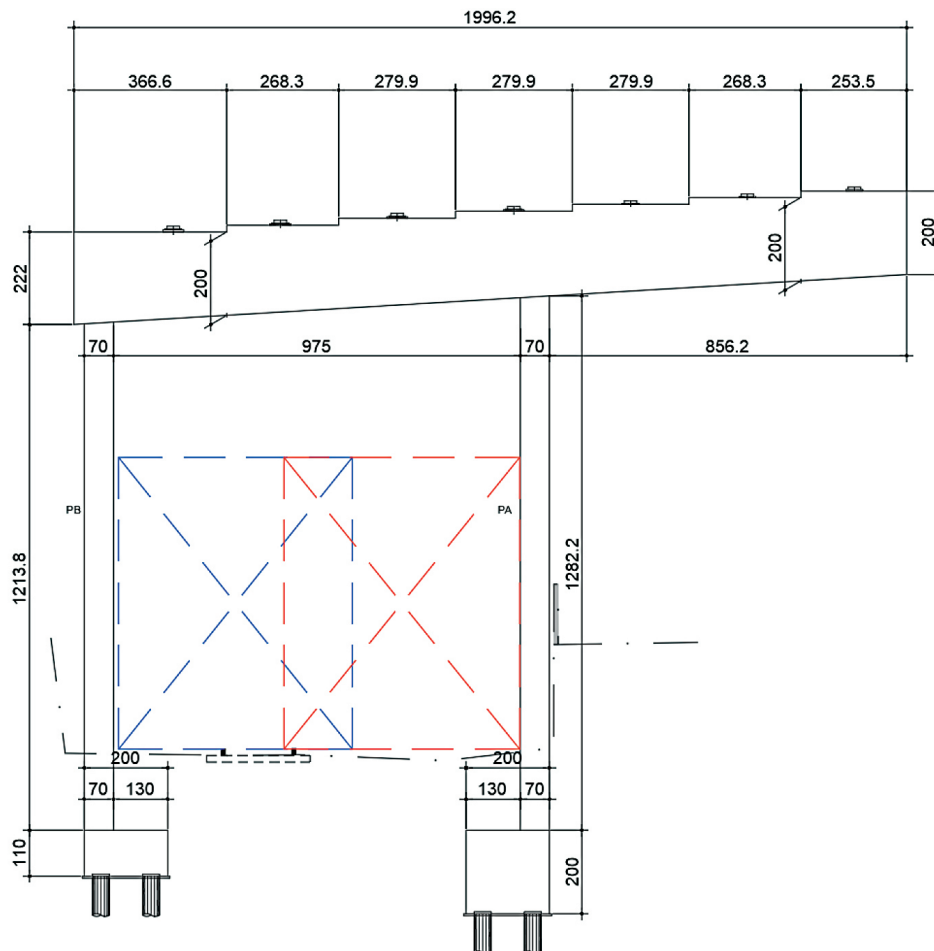


Figura 5 – Forma do pilar estudado

Geometria do pilar			
h [m]	13,5		
a <sub>long</sub> [m]	1,5	a <sub>transv</sub> [m]	0,7
A [m <sup>2</sup> ]	1,05		

L <sub>e,long</sub> [m]	27,0	L <sub>e,transv</sub> [m]	13,5
I <sub>long</sub> [m <sup>4</sup> ]	0,197	I <sub>transv</sub> [m <sup>4</sup> ]	0,043
r <sub>long</sub> [m]	0,433	r <sub>transv</sub> [m]	0,202
λ <sub>long</sub>	62,4	λ <sub>transv</sub>	66,8

O pilar utiliza concreto  $f_{ck} = 30$  MPa. Calculando as excentricidades de segunda ordem pelo MPP obteríamos:

Pilar padrão	
α <sub>b</sub>	1
v	0,51
1/r <sub>transv</sub> [m <sup>-1</sup> ]	0,0071
1/r <sub>long</sub> [m <sup>-1</sup> ]	0,0033
e <sub>2,long</sub> [m]	0,240
e <sub>2,transv</sub> [m]	0,129

Admitindo uma excentricidade accidental de  $\frac{h}{200} = 6,75$  cm, ficaríamos com os seguintes momentos de cálculo para o dimensionamento do pilar:

Esforços de cálculo	
M <sub>d,long</sub> [tf.m]	424,0
M <sub>d,transv</sub> [tf.m]	245,7

Para resistir às solicitações resultantes da análise pelo MPP seria necessária uma taxa de armadura da ordem de 2,3%.

A formulação aqui construída será utilizada em uma estrutura isolada que representa o pilar, a fim de alidar os resultados obtidos pelo MPP e verificar se, em condição semelhante, em termos de hipóteses, resultados parecidos podem ser obtidos.

Adotando a taxa de armadura obtida pelo MPP, as solicitações de cálculo resultantes da formulação aqui proposta foram:

Esforços de cálculo	
M <sub>d,long</sub> [tf.m]	188,8
M <sub>d,transv</sub> [tf.m]	109,5

Observe que o modelo construído para obtenção dos esforços de cálculo já contempla excentricidade accidental, de maneira que o valor do momento apresentado já leva em consideração esse parâmetro. Os esforços solicitantes obtidos com a formulação aqui apresentada não levam em consideração o efeito combinado das ações em diferentes planos, posto que o elemento construído é plano. Tal efeito pode impactar a resposta, uma vez que por efeito da não-linearidade física há perda de rigidez à medida em que nos aproximamos da plastificação dos materiais que constituem a seção. O MPP mostra-se como um método que fornece resultados seguros. Na situação aqui estudada, o MPP forneceu resultados com significativa margem de segurança. Isso se deve ao fato de que, frente à grandeza do esforço normal presente na seção, não há fissuração do concreto para as solicitações atuantes, de maneira que a não-linearidade física pouco impacta a rigidez, fenômeno que passa despercebido pelo MPP por não ser um método que busca entender o comportamento estrutural, mas apenas fornecer solicitações que sejam superiores aos reais com significativa margem de segurança. A situação aqui apresentada nem sempre é observada em situação de projeto, de maneira que admitir que o MPP sempre fornecerá resultados com significativa margem de segurança pode ser equivocado. Em casos em que ambas as não-linearidades tenham papel significativo, a margem de segurança pode ser pequena.

Na busca contínua da engenharia por estruturas que garantam segurança e apresentem bom comportamento estrutural ao longo de sua vida útil, a ferramenta aqui apresentada objetiva oferecer uma resposta mais próxima da realidade em situações atípicas a fim de garantir que o projetista possa avançar no cálculo estrutural com tranquilidade.

## Conclusões

Observa-se que os efeitos da não linearidade geométrica passam a ser significativos em situações específicas, no caso de pilares, eles passam a ser mais relevantes em estruturas com elevada taxa de compressão e que apresentem esbelteza significativa.

Os efeitos da não linearidade física passam a ser mais importantes em estruturas que apresentem significativa taxa de fissuração na seção transversal. Cuidado especial deve ser despendido a estruturas que

possam apresentar plastificação dos materiais constituintes da seção para as solicitações próximas das obtidas na análise não linear geométrica com linearidade física, posto que nessa situação a perda de rigidez por não-linearidade física passa a ser mais importante.

Note que há situações nas quais para que uma não linearidade seja relevante a outra acaba atenuada em função do equilíbrio da própria estrutura. Neste tipo de situação o MPP pode fornecer resultados com significativa margem de segurança.

A ferramenta aqui apresentada mostra-se como uma alternativa que pode ser utilizada no estudo de estruturas que apresentem esbelteza elevada, acima de limites que impeçam seu dimensionamento por meio de métodos apresentados em norma, a fim de entender se em determinadas situações essas estruturas podem apresentar um bom comportamento.

Em função das não-linearidades física e geométrica, a redução da taxa de armadura para valores inferiores aos obtidos por meio de métodos normativos deve ser um procedimento tomado com cautela, posto que em cada estrutura, a depender das solicitações e da condição de contorno, a redução possa ser significativa ou ínfima.

## Referências

[1] ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR 6118:2014 – Projeto de estruturas de concreto – Procedimento. Rio de Janeiro, 2014.

[2] ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR 8681:2004 – Ações e segurança nas estruturas – Procedimento. Rio de Janeiro, 2004.

[3] MAZZILLI, C. E. N.; ANDRÉ, J. C.; BUCALEM, M. L.; CIFÚ, M. – Lições em Mecânica das Estruturas: Dinâmica. Blucher, 2014.

[4] BUCALEM, M. L.; BATHE, K. J – *The mechanics of Solids and Structures – Hierarchical Modeling and the Finite Element Solution*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2011.

[5] BATHE, K. J – *Finite Element Procedures*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1996.

[6] BRASIL, R. M. L. R. F.; MAZZILLI, C. E. N. – *A general FEM formulation of nonlinear dynamics applied to accessing the static loading effect upon the dynamic response of planar frames. Applied Mechanics Reviews*. Volume 46. 1993.

[7] SOUZA LIMA, V. M.; VENÂNCIO FILHO, F. – Considerações sobre a não-linearidade geométrica em estruturas reticuladas. CNPQ. Rio de Janeiro. 1982.

## Apêndice

A matriz  $\beta_\ell$  é apresentada a seguir:

$$\beta_\ell = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3x}{5\ell^2} & \frac{x}{20\ell} & 0 & -\frac{3x}{5\ell^2} & \frac{x}{20\ell} & \\ & \frac{x}{15} & 0 & -\frac{20\ell}{x} & -\frac{60}{x} & \\ & & 0 & 0 & 0 & \\ \text{Sim} & & & \frac{3x}{5\ell^2} & -\frac{20\ell}{x} & \\ & & & & \frac{x}{15} & \end{bmatrix}$$

A matriz  $\beta_x$  assume a forma:

$$\beta_x = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \beta_{22} & \beta_{23} & 0 & \beta_{25} & \beta_{26} \\ & & \beta_{33} & 0 & \beta_{35} & \beta_{36} \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ \text{Sim} & & & \beta_{55} & \beta_{56} & \\ & & & & \beta_{66} & \end{bmatrix}$$

Os termos da matriz  $\beta_x$  são

$$\begin{aligned} \beta_{22} &= \frac{18x^5}{5\ell^6} - \frac{9x^4}{\ell^5} + \frac{6x^3}{\ell^4} \\ \beta_{23} &= \frac{9x^5}{5\ell^5} - \frac{21x^4}{4\ell^4} + \frac{5x^3}{\ell^3} - \frac{3x^2}{2\ell^2} \\ \beta_{25} &= -\frac{18x^5}{5\ell^6} + \frac{9x^4}{\ell^5} - \frac{6x^3}{\ell^4} \\ \beta_{26} &= \frac{9x^5}{5\ell^5} - \frac{15x^4}{4\ell^4} + \frac{2x^3}{\ell^3} \\ \beta_{33} &= \frac{9x^5}{10\ell^4} - \frac{3x^4}{\ell^3} + \frac{11x^3}{3\ell^2} - \frac{2x^2}{\ell} + \frac{x}{2} \\ \beta_{35} &= -\frac{9x^5}{5\ell^5} + \frac{21x^4}{4\ell^4} - \frac{5x^3}{\ell^3} + \frac{3x^2}{2\ell^2} \\ \beta_{36} &= \frac{9x^5}{10\ell^4} - \frac{9x^4}{4\ell^3} + \frac{11x^3}{6\ell^2} - \frac{x^2}{2\ell} \\ \beta_{55} &= \frac{18x^5}{5\ell^6} - \frac{9x^4}{\ell^5} + \frac{6x^3}{\ell^4} \\ \beta_{56} &= -\frac{9x^5}{5\ell^5} + \frac{15x^4}{4\ell^4} - \frac{2x^3}{\ell^3} \\ \beta_{66} &= \frac{9x^5}{10\ell^4} - \frac{3x^4}{2\ell^3} + \frac{2x^3}{3\ell^2} \end{aligned}$$

A matriz de rigidez não linear geométrica

$$K_{NL} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} & K_{16} \\ & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} & K_{26} \\ & & K_{33} & K_{34} & K_{35} & K_{36} \\ & & & K_{44} & K_{45} & K_{46} \\ \text{Sim} & & & & K_{55} & K_{56} \\ & & & & & K_{66} \end{bmatrix}$$



Quatro valores se repetirão na definição da matriz de rigidez, sendo eles:

$$\begin{aligned}\delta_1 &= -\ell U_6 + 12U_5 - \ell U_3 - 12U_2 \\ \delta_2 &= \ell U_6 + 3U_5 - 4\ell U_3 - 3U_2 \\ \delta_3 &= -4\ell U_6 + 3U_5 + \ell U_3 - 3U_2 \\ \delta_4 &= 2\ell^2 U_6^2 + (-3\ell U_5 - \ell^2 U_3 + 3\ell U_2)U_6 + 18U_5^2 + \\ &\quad + (-3\ell U_3 - 36U_2)U_5 + 15\ell U_4 + 2\ell^2 U_3^2 \\ &\quad + 3\ell U_2 U_3 + 18U_2^2 - 15\ell U_1\end{aligned}$$

de maneira que os termos da matriz de rigidez assumem a forma:

$$\begin{aligned}K_{11} &= \frac{EA}{\ell} \\ K_{12} &= \frac{EA}{20\ell^2} \delta_1 \\ K_{13} &= \frac{EA}{60\ell} \delta_2 \\ K_{14} &= -\frac{EA}{\ell} \\ K_{15} &= -\frac{EA}{20\ell^2} \delta_1 \\ K_{16} &= \frac{EA}{60\ell} \delta_3 \\ K_{22} &= \frac{12EI}{\ell^3} + \frac{EA}{25\ell^3} \delta_4 \\ K_{23} &= \frac{6EI}{\ell^2} + \frac{EA}{300\ell^2} \delta_4 \\ K_{24} &= -\frac{EA}{20\ell^2} \delta_1 \\ K_{25} &= -\frac{12EI}{\ell^3} - \frac{EA}{25\ell^3} \delta_4 \\ K_{26} &= \frac{6EI}{\ell^2} + \frac{EA}{300\ell^2} \delta_4 \\ K_{33} &= \frac{4EI}{\ell} + \frac{EA}{225\ell} \delta_4 \\ K_{34} &= -\frac{EA}{60\ell} \delta_2 \\ K_{35} &= -\frac{6EI}{\ell^2} - \frac{EA}{300\ell^2} \delta_4 \\ K_{36} &= \frac{2EI}{\ell} - \frac{EA}{900\ell} \delta_4 \\ K_{44} &= \frac{EA}{\ell} \\ K_{45} &= \frac{EA}{20\ell^2} \delta_1 \\ K_{46} &= -\frac{EA}{60\ell} \delta_3 \\ K_{55} &= \frac{12EI}{\ell^3} + \frac{EA}{25\ell^3} \delta_4 \\ K_{56} &= -\frac{6EI}{\ell^2} - \frac{EA}{300\ell^2} \delta_4 \\ K_{66} &= \frac{4EI}{\ell} + \frac{EA}{225\ell} \delta_4\end{aligned}$$

As integrais de tensão na região comprimida de concreto para deformações específicas inferiores a  $\epsilon_{c2}$  são dadas por:

$$\begin{aligned}N_c &= -\sigma_{cd} \frac{\epsilon_{c2}}{\kappa} \left[ a_1 t + a_2 \frac{t^2}{2} - a_1 \frac{t^{n+1}}{n+1} - a_2 \frac{t^{n+2}}{n+2} \right]_{t_1}^{t_2} \\ M_x &= -\sigma_{cd} \frac{\epsilon_{c2}}{\kappa} \left[ a_1 a_3 t + (a_1 a_4 + a_2 a_3) \frac{t^2}{2} + \right. \\ &\quad \left. + a_2 a_4 \frac{t^3}{3} - a_1 a_3 \frac{t^{n+1}}{n+1} - (a_1 a_4 + a_2 a_3) \frac{t^{n+2}}{n+2} \right. \\ &\quad \left. - a_2 a_4 \frac{t^{n+3}}{n+3} \right]_{t_1}^{t_2} \\ M_y &= -\sigma_{cd} \frac{\epsilon_{c2}}{2\kappa} \left[ a_1^2 t + a_1 a_2 t^2 + a_2^2 \frac{t^3}{3} - \right. \\ &\quad \left. - a_1^2 \frac{t^{n+1}}{n+1} - 2a_1 a_2 \frac{t^{n+2}}{n+2} - a_2^2 \frac{t^{n+3}}{n+3} \right]_{t_1}^{t_2}\end{aligned}$$

onde:

$$\begin{aligned}\sigma_{cd} &= 0,85 \frac{f_{ck}}{\gamma_c} \\ a_1 &= m_x \left( \frac{\epsilon_{c2} - \epsilon_0}{\kappa} - y_1 \right) + x_1 \\ a_2 &= -m_x \frac{\epsilon_{c2}}{\epsilon_{c2} - \epsilon_0} \\ a_3 &= \frac{\kappa}{\epsilon_{c2}} \\ a_4 &= -\frac{\kappa}{\epsilon_{c2}} \\ t_1 &= 1 - \frac{\epsilon_0 + \kappa y_1}{\epsilon_{c2}} \\ t_2 &= 1 - \frac{\epsilon_0 + \kappa y_2}{\epsilon_{c2}}\end{aligned}$$

As integrais de tensão na região comprimida de concreto para deformações superiores a  $\epsilon_{c2}$  são dadas por:

$$\begin{aligned}N_c &= \sigma_{cd} \left[ m_x \frac{y^2}{2} + a_5 y \right]_{y_1}^{y_2} \\ M_x &= \sigma_{cd} \left[ m_x \frac{y^3}{3} + a_5 \frac{y^2}{2} \right]_{y_1}^{y_2} \\ M_y &= \frac{\sigma_{cd}}{2} \left[ m_x^2 \frac{y^3}{3} + 2a_5 m_x \frac{y^2}{2} + a_5^2 y \right]_{y_1}^{y_2}\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}a_5 &= x_1 - m_x y_1 \\ m_x &= \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}\end{aligned}$$